

T H E S E

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

NGUYEN VAN NOI

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DU RECOLLEMENT SUBSONIQUE
INCOMPRESSIBLE D'UN ECOULEMENT PLAN TURBULENT A SA FRONTIERE

soutenue le 29 janvier 1971 devant la Commission d'Examen

M.L. MALAVARD

Président

M. J.J. BERNARD

Examineurs

M. M. SIRIEIX

M. SANANES

Invité



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551512_0042

T H E S E

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

NGUYEN VAN NOI

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DU RECOLLEMENT SUBSONIQUE
INCOMPRESSIBLE D'UN ECOULEMENT PLAN TURBULENT A SA FRONTIERE

soutenue le 29 Janvier 1971 devant la Commission d'Examen

M. L. MALAVARD

Président

M. J.J. BERNARD

Examineurs

M. M. SIRIEIX

M. SANANES

Invité

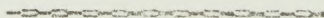
Cette étude a été effectuée à la Division de Recherche. Aérodynamique de l'OFFICE NATIONAL d'ETUDES et de RECHERCHES AEROSPATIALES sous la Direction de Monsieur M. SIRIEIX.

Mes plus vifs remerciements vont à Monsieur le Professeur L. MALAVARD qui a consenti à présider le jury d'examen et à Monsieur le Professeur J.J. BERNARD qui a bien voulu accepter d'en faire partie.

Ma gratitude s'adresse à Monsieur P. CARRIERE, Directeur Scientifique de la Direction Aérodynamique de l'O.N.E.R.A., qui m'a donné la possibilité de mener à bien cette étude.

Ma grande reconnaissance va aussi à Monsieur M. SIRIEIX, Chef de Division Aérodynamique, Monsieur J. MIRANDE, Ingénieur de Recherche, dont l'aide et les conseils m'ont été très précieux tout le long de cette étude.

Je dois enfin mentionner le large concours que m'a apporté tout le personnel de l'O.N.E.R.A. à CHALAIS-NEUDON et à chacun j'adresse ici mes plus vifs remerciements.



ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DU RECOLLEMENT
SUBSONIQUE INCOMPRESSIBLE D'UN ECOULEMENT PLAN TURBULENT

A. SA FRONTIERE

- R E S U M E -

L'écoulement dans un canal de hauteur donnée présentant une paroi inférieure en forme de marche descendante et comportant, de ce fait, un point de décollement fixé a été étudié. L'expérience a permis de mettre en évidence des propriétés générales concernant les répartitions de pression longitudinale et les paramètres caractéristiques de la couche dissipative turbulente. Ces propriétés servent de base à l'établissement de différentes méthodes de calculs théoriques simples de l'écoulement. Parmi ces méthodes, l'étude du modèle de BATCHELOR dans lequel le sillage est assimilé à une zone à rotationnel constant a été effectuée et a conduit à une solution numérique à un paramètre. La complexité de l'écoulement décollé nécessite en fait des modèles plus réalistes faisant appel à certaines données empiriques. L'utilisation de la propriété de quasi-universalité des courbes réduites, donnant la répartition des pressions $\bar{w}$ (x/x_R) et le saut de pression au point de recollement (K_p)_R (C_q), conduit à des résultats satisfaisants valables uniquement pour des configurations particulières de l'écoulement. Par ailleurs, le modèle de calcul du sillage à partir des données empiriques universelles des paramètres de forme H_c , $\bar{H}$, et de la fonction de dissipation ϕ permet d'obtenir des résultats très encourageants.

NOTATIONS PRINCIPALES

- $\mathcal{L}$ Largeur de la veine (envergure)
 D Hauteur de la veine
 h Hauteur de la marche
 α Inclinaison du plancher de recollement
 σ Coefficient de mélange
 η Variable de similitude $\eta = \sigma \frac{y}{x}$
 φ_1 Vitesse réduite $\varphi_1 = \frac{u}{u_e}$
 x_0 Distance entre le point de décollement et l'origine fictive de la couche de mélange
 x, y Coordonnées du point courant dans un système d'axe rectangulaire. L'axe des x est en général confondu avec le tracé du plancher de recollement.
 ρ Masse spécifique
 V Vitesse de référence
 δ Epaisseur de la couche limite
 δ^* Epaisseur de déplacement
 δ^{**} Epaisseur de quantité de mouvement
 δ^{***} Epaisseur d'énergie cinétique
 $H, \bar{H}, \tilde{H}$ Paramètres de forme
 Φ Fonction de dissipation
 p Pression statique à la paroi
 p_0 Pression statique de référence
 q_0 Pression dynamique de référence
 V_x Module de vitesse de l'écoulement extérieur le long de la ligne de jet (j)
 V_i Module de vitesse de l'écoulement intérieur le long de la ligne de jet (j)
 V_∞ Vitesse de l'écoulement extérieur à l'infini amont
 θ Inclinaison de vitesse
 L Longueur de la ligne de jet
 K Constante de BATCHELOR $K = \frac{(P_i)_x - (P_i)_x}{\sqrt{2} \rho \omega^2 h^2}$
 K_p Coefficient de pression $K_p = \frac{p - p_0}{q_0}$
 Re Nombre de Reynolds.
- Indices de pression, vitesse.-
- 1 Condition au point de décollement
 R Condition au point de recollement
 e Condition à la frontière de la zone dissipative
 i Condition d'arrêt
 ∞ Condition à l'infini
 I Condition au domaine (I)
 II Condition au domaine

TABLE DES MATIERES

Pages

I - <u>INTRODUCTION</u>	7
II - <u>ETUDES EXPERIMENTALES</u>	8
II.1 - Methode et moyens d'essais	8
II.1.1 - Dispositif expérimental	8
II.1.2 - Conditions d'essais	9
II.2 - Analyse des mesures de pression pariétale	9
II.2.1 - Généralités	9
II.2.2 - Influence de la hauteur de la marche sur l'évolution de pression dans la zone décollée	10
II.3 - Analyse des couches dissipatives	13
II.3.1 - Configurations retenues	13
II.3.2 - Epaisseurs caractéristiques	14
II.3.3 - Paramètres de formes	14
II.4 - Conclusion de l'étude expérimentale	15
III - <u>ETUDE THEORIQUE MODELE DE PRANDTL-BATCHELOR</u>	16
III.1 - Généralités	16
III.2 - Modèle de BATCHELOR	16
III.3 - Recherche d'une solution numérique	17
III.3.1 - Principe	17
III.3.2 - Problème intérieur	18
III.3.3 - Problème extérieur	19
III.3.4 - Calculs du nouveau contour résultant du couplage	20
III.3.5 - Convergence et unicité	21
III.3.6 - Examens critiques de la solution obtenue	21
III.4 - Recherche d'un modèle physique plus réaliste	22

	Pages
IV - <u>MODELE BASE SUR L'UTILISATION DES EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE</u>	24
IV.1 - Généralités	24
IV.2 - Calcul de l'écoulement derrière une marche à partir d'une loi empirique quasi universelle représentant l'évolution des pressions	26
IV.2.1 - Principe	26
IV.2.2 - Comparaison avec l'expérience	28
IV.3 - Calcul de l'écoulement derrière une marche, à partir de données empiriques sur les paramètres de forme H , $\bar{H}$ et la fonction de dissipation ϕ	29
IV.3.1 - Généralités	29
IV.3.2 - Position du problème et principe de la solution	29
IV.4 - Conclusion sur les calculs théoriques	34
5 - <u>CONCLUSION</u>	35



I -- INTRODUCTION.

I.1 - Les recherches concernant les écoulements turbulents séparés ont fait l'objet, ces dix dernières années, d'un développement important, dans le cas où l'écoulement extérieur à la zone décollée est bidimensionnel et supersonique. Elles ont permis tout d'abord, d'aboutir à une compréhension assez satisfaisante des phénomènes observés dont les principaux facteurs d'influence ont été dégagés (1 à 11). Elles ont également conduit à la mise au point d'un certain nombre de méthodes pratiques de calcul faisant largement appel, la plupart du temps, à des données empiriques. Ces méthodes mettent à la disposition de l'Ingénieur des moyens de prévision souvent assez précis (4, 5, 6, 9, 11).

Par contre, lorsque l'écoulement extérieur à la zone décollée est subsonique, les recherches ont été beaucoup moins nombreuses, les progrès peu marqués et les moyens de calculs extrêmement rares (10, 12). On peut trouver les raisons essentielles de cet insuccès, d'une part, dans la complexité de certaines configurations d'écoulement décollé qui présentent un caractère non permanent lié à l'existence d'un sillage tourbillonnaire périodique, d'autre part, dans le mode compliqué de couplage entre le développement de la zone décollée et celui de l'écoulement extérieur.

Compte tenu de cette situation et de l'intérêt pratique de ces problèmes, une série de recherches systématiques a été récemment entreprise et se poursuit à l'O.N.E.R.A. Ces recherches ont été orientées tout d'abord vers l'étude expérimentale détaillée en écoulement incompressible d'un certain nombre de configurations typiques conduisant à des écoulements décollés, permanents en moyenne et turbulents à leur frontière. Ensuite, l'établissement d'une méthode de calcul simple de l'écoulement en aval du point de séparation, comportant la définition d'une règle de couplage entre la zone décollée et l'écoulement extérieur et faisant appel aux données empiriques ainsi acquises, a été envisagé et poursuivi. C'est dans ce domaine que mon activité a été la plus importante.

I.2 - Lorsque l'écoulement est subsonique, l'existence de la zone décollée modifie plus ou moins profondément l'écoulement extérieur. Le problème du décollement n'est en fait résolu qu'une fois que le problème de recollement est maîtrisé. C'est pourquoi les configurations expérimentales retenues (marches descendantes) comportent un point de séparation géométriquement fixé; cette propriété permet de concentrer les recherches sur l'analyse du recollement, dont le rôle essentiel précédemment souligné a été mis en évidence par les études analogues effectuées en écoulement supersonique.

Les expériences ont été conduites sur des modèles permettant de faire varier deux facteurs importants.

- D'une part, le sens et l'intensité du gradient de pression en aval du point de recollement, de façon à reproduire dans ce domaine des circonstances d'écoulements directement comparables à celles qui s'établissent dans de nombreux exemples d'application (profil d'aile, diffuseur, turbomachine, gouverne, etc....),

- D'autre part, l'épaisseur relative de la couche limite turbulente en amont de la zone décollée (rapportée à l'étendue de celle-ci).

1.3 - La présentation des travaux auxquels j'ai participé au titre de cette thèse comportera 2 parties :

- La première concerne la discussion des résultats expérimentaux (distribution pariétales de pression, champs des vitesses). L'analyse détaillée de la zone décollée et des couches limites amont et aval permettra de mettre en évidence les propriétés les plus caractéristiques marquant l'évolution des paramètres de forme et des fonctions caractéristiques des profils de vitesse dans ce domaine.
- Dans la seconde partie de l'exposé, essentiellement théorique, 3 modèles de calcul du recollement subsonique seront présentés.

Le premier modèle fait appel à la théorie des fluides non visqueux et reprend un certain nombre de concepts dégagés par PRANDTL-BATCHELOR. Le deuxième est basé sur le caractère quasi-universel de l'évolution longitudinale des pressions au voisinage du recollement. Le troisième modèle s'appuie sur un calcul de couche limite utilisant un certain nombre de fonctions empiriques dont le caractère quasi-universel au voisinage du point de recollement a été démontré par l'étude expérimentale.

II - ETUDES EXPERIMENTALES.-

II.1 - Méthodes et moyens d'essais -

II.1.1 - Dispositif expérimental : Le montage utilisé, représenté schématiquement planche 1 est aménagé sur le plancher inférieur de la veine rectangulaire ($157 \times 325 \text{ mm}^2$) d'une soufflerie subsonique. Il comporte une marche descendante de hauteur $AB=h$ réglable $0 \leq h \leq 31,5 \text{ mm}$ qui s'étend sur toute la largeur $\mathcal{L}$ disponible entre les parois latérales ($\mathcal{L} = 325 \text{ mm}$). En aval de cette marche dont l'arête supérieure A est fixe, est disposé un plancher articulé en B, C, D de façon à faire varier l'inclinaison α de la paroi BC (longueur 500 mm) sur laquelle s'effectue le recollement. L'angle α peut être ajusté à toute valeur comprise entre $+10^\circ$ et -10° , le sens positif correspondant à une configuration convergente de BC. L'élément de plancher CD permet de raccorder BC à la structure non déformable du diffuseur de la soufflerie. Ce montage comporte également 2 dispositifs de contrôle par aspiration ou soufflage, soit de la couche limite établie en amont de A, soit de la zone décollée. Ces dispositifs n'ont pas été utilisés au cours des essais dont les résultats sont présentés dans cet exposé. On remarquera qu'il n'a pas été prévu de piège à couche limite sur les parois latérales. Des expériences préliminaires ont en effet montré que, dans ces conditions, une excellente uniformité transversale des pressions était obtenue dans tout le domaine étudié pour des allongements $\mathcal{L}/h$ de la marche supérieurs à 10. Toutefois, cette uniformité transversale est subordonnée à une étanchéité rigoureuse du montage, au niveau des parois latérales et de l'extrémité inférieure de la marche (B), étanchéité qui a été soigneusement contrôlée.

II.1.2 - Conditions d'essais :

II.1.2.1 - La soufflerie subsonique est du type EIFFEL, la vitesse V_0 de l'écoulement uniforme en amont du montage pouvant être réglée continûment de 0 à 200 m/sec. Dans la plupart des cas traités, V_0 a été maintenu à une valeur sensiblement constante de 50 m/sec. Le niveau moyen de la turbulence en veine, caractérisé par le paramètre $\sqrt{\overline{u^2}}/V_0$ peut varier de 0,5 à 1% selon la configuration de plancher de recollement utilisée. Afin d'obtenir des couches limites turbulentes parfaitement stables et reproductibles en amont de la marche, une zone rugueuse a été aménagée à la sortie du collecteur. Elle est constituée par une bande de toile émeri ceinturant entièrement le canal. Dans ces conditions, la couche limite en A possède en moyenne les caractéristiques suivantes :

$$\delta_0 = 14 \text{ mm} \quad \delta_0^* = 1,7 \text{ mm} \quad \delta_0^{**} = 1,3 \text{ mm} \quad \delta_0^{***} = 2,3 \text{ mm}$$

$$\frac{\delta_0^*}{\delta_0^{**}} = H_0 = 1,3 \quad \bar{H}_0 = \frac{\delta_0^{***}}{\delta_0^{**}} = 1,8$$

II.1.2.2 - Les mesures effectuées ont pour objet :

- La détermination des pressions pariétales, au moyen de prises resserrées (figure 1) disposées suivant l'axe longitudinal du montage et complétées par 4 rangées transversales destinées à contrôler la bidimensionnalité de l'écoulement ;
- L'analyse détaillée du champ des vitesses à partir des mesures locales des grandeurs moyennes suivantes : pressions statiques et d'arrêt, direction du vecteur vitesse.

L'explorateur utilisé déplace les sondes normalement à la paroi, avec un pas réglable de 0,1 à 1 mm. Des variations importantes de la direction de l'écoulement nécessitent, pour certaines stations, que les sondages soient effectués en deux fois, pour assurer une orientation convenable des sondes. Cela impose un contrôle soigneux des conditions d'essais et un repérage rigoureux des positions. Celui-ci est obtenu avec une précision de 0,05 mm au moyen d'un cathétomètre placé à l'extérieur de la veine.

II.1.2.3 - Afin de compléter les informations ainsi recueillies, des visualisations pariétales par dépôt de gouttelettes liquide ont été utilisées en vue de localiser la position moyenne du point de recollement. Cette technique a permis d'obtenir des mesures parfaitement reproductibles et en bon accord avec les explorations de vitesse moyenne.

II.2. - Analyse des mesures de pression pariétale. -

II.2.1 - Généralités :

Les grandeurs de référence p_0 et q_0 utilisées dans la présentation des résultats sont relatives à l'écoulement uniforme établi en amont de la marche, suffisamment loin pour être indépendant de la configuration étudiée.

Ainsi que le montre les relevés axiaux de pression, effectués sur les parois supérieures du montage (courbe $Kp = \frac{P - P_0}{q_0}$ pl. 2 et 3), les valeurs $\alpha > -0,9^\circ$ (paroi de recollement convergente ou très faiblement divergente) correspondent à un écoulement accéléré en moyenne, en aval du point de recollement R; la configuration $\alpha = -0,9^\circ$ conduit à un état uniforme en amont et en aval de la marche, tandis que les valeurs $\alpha < -0,9^\circ$ produisent un écoulement décéléré. Lorsque α atteint des valeurs inférieures à -8° , d'importantes fluctuations de vitesse à basse fréquence apparaissent. Ces configurations ont été systématiquement écartées pour l'instant, si bien que dans l'intervalle $-7^\circ \leq \alpha < 10^\circ$ étudiés, les écoulements obtenus sont stables, reproductibles et comportent un champ de vitesses moyennes, présentant une zone de décollement fermée. Une comparaison entre les distributions de pression obtenues sur les parois opposées du montage (pl. 2 et 3) pour deux valeurs extrêmes de h/D (0,05 et 0,2) met en évidence sur la paroi inférieure, une évolution caractéristique propre au phénomène de décollement - recollement dont nous allons étudier les aspects essentiels.

II.2.2 - Influence de la hauteur de la marche sur l'évolution des pressions dans la zone décollée :

II.2.2.1 - Lorsque l'on fait varier la hauteur h de la marche pour une même valeur de α , différents facteurs interviennent simultanément. On enregistre :

- en premier lieu, une modification de l'étendue du décollement directement liée à h ,
- ensuite, un effet dû à la limitation transversale de l'écoulement par la paroi supérieure, qui se traduit par une distorsion du champ des vitesses de l'écoulement non visqueux d'autant plus marquée que h/D est plus grand.
- Enfin, un effet propre à l'action de la couche limite initiale qui peut être caractérisé par le paramètre δ^*/h .

Dans cette série d'essais, où la couche limite établie sur la paroi en amont de la marche n'a pas été modifiée, il n'est donc pas possible de séparer en toute rigueur les facteurs d'influence propres à la couche limite de ceux qui proviennent de la géométrie du canal et que l'on peut qualifier de purement potentiels.

Toutefois, l'analyse détaillée des distributions de pression, permettra de dégager un certain nombre de propriétés spécifiques des effets de couche limite initiale.

II.2.2.2 - Courbes de pression :

Les résultats obtenus pour 3 configurations typiques $\alpha = +7^\circ, -0,9^\circ, -4^\circ$ sont donnés pl. 4 à 6 sous forme de courbes $Kp = \frac{P - P_0}{q_0} = f(x/h)$

l'abscisse réduite x/h du point courant est comptée depuis une origine 0 qui est la projection du bord supérieur A sur le plancher BC et normalisée par la hauteur $h = AO$

Ces diverses courbes présentent une évolution tout à fait enlame

Cette évolution typique des pressions est tout à fait semblable à celle que l'on observe lors du recollement d'un écoulement supersonique. De la même façon, elle met en évidence 3 domaines distincts : dans le premier, s'étendant sur environ 3 hauteurs de marche, quelle que soit la configuration, la pression d'abord uniforme subit une légère décroissance jusqu'à un minimum bien marqué. Le second domaine, qui comprend le point de recollement R , se caractérise par une remontée très brutale de la pression dont la croissance rapide se poursuit au-delà de R . Le troisième domaine se distingue des précédents par un changement très marqué dans l'évolution des pressions qui est essentiellement lié à la configuration géométrique du canal en aval de la marche (croissance, décroissance, ou stabilisation de la pression).

Les variations de h/D à $\alpha = cte$ n'altèrent pas sensiblement l'allure des courbes $Kp = f(\alpha/h)$ dans les domaines 1 et 2, mais entraînent un changement de la pression du culot.

II.2.2.3 - Position du point de recollement :

L'évolution de la position relative du point de recollement en fonction de ces divers paramètres géométriques, est représentée pl. 7 où sont regroupés tous les résultats d'essais.

L'étendue x_R/h de la zone décollée est particulièrement sensible à la configuration géométrique du plancher de recollement et augmente considérablement lorsque la paroi aval devient divergente.

Par contre x_R/h est assez peu modifié lorsque h/D varie, spécialement pour les valeurs positives et faiblement négatives de α . On observe dans ce cas que des variations très significatives de l'épaisseur relative de la couche

limite $\delta_o^{**}/h \sim D/h$ ne modifient pas de façon marquée l'étendue x_R/h de la zone décollée.

II.2.2.4 - Pression au point de recollement :

La recompression que subit l'écoulement séparé depuis l'origine du décollement (pression de culot p_1) jusqu'au point de recollement (pression p_R) est examinée pl. 8, où sont

présentées les courbes $(Kp)_R = \frac{p_R - p_1}{q_1} = f(\alpha)$ pour les différentes valeurs de h/D , q_1 étant la pression dynamique correspondant à p_1 pour l'écoulement non visqueux.

Lorsque h/D est maintenu constant, on observe sur ce diagramme que la recompression est d'autant plus grande que l'angle α est plus faible, l'évolution correspondante étant toutefois peu marquée pour $\alpha > 0$. D'autre part, les courbes $(Kp)_R = f(\alpha)$ s'étagent régulièrement pour les diverses valeurs h/D , mettant en évidence dans tous les cas un accroissement sensible de $(Kp)_R$ lorsque h/D augmente, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{\delta_o^{**}}{h} = \frac{\delta_o^{**}}{D} \cdot \frac{D}{h} \sim \frac{D}{h} \quad \text{diminue;}$$

une telle évolution s'explique parfaitement, comme dans le cas du recollement supersonique, à partir des résultats fournis par l'étude du développement de la couche de mélange isobare (1-6).

Lorsque δ_o^{**}/h augmente, la vitesse V_j sur la ligne de jet en fin de mélange isobare diminue et par suite, la recompression obtenue au point de recollement, qui est un point d'arrêt sur cette ligne, décroît.

Il est donc naturel d'exprimer les variations de $(Kp)'_R$ en fonction du paramètre Cq , déjà utilisé dans les études supersoniques (1-6), qui permet de rattacher V_j à δ_o^{**} , à partir des lois de mélange turbulent d'un jet isobare; nous rappellerons que lorsque l'épaisseur de quantité de mouvement δ_o^{**} de la couche limite initiale est modérée devant l'étendue du décollement, le paramètre Cq prend la forme simplifiée suivante :

$$Cq = \frac{\delta_o^{**}}{x_R + x_o}$$

où $x_R + x_o$ représente une longueur fictive de développement du mélange permettant de fournir une représentation approchée des effets de couche limite initiale (6); $x_o = K \delta_o^{**}$ la constante K étant égale à 81 pour un écoulement incompressible.

Dans le cadre de cette théorie simplifiée, les profils de vitesse dans la zone de mélange obéissent à une loi de similitude; ils s'expriment par la relation $\psi_1 = \frac{u}{u_e} = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf} \eta]$

en fonction de la variable de similitude $\eta = \sigma \frac{y}{x_R + x_o}$ les vitesses de recirculation étant supposées très petites;

σ , coefficient de mélange, est égal à 12 en écoulement incompressible.

A partir de ces expressions et des équations de conservation, il est aisé de calculer pour toute valeur x_R , la vitesse $(V_j)_R$ sur la ligne de jet et de définir le saut de pression qui correspond à une recompression isentropique, hypothèse fréquemment utilisée dans les études de recollement supersonique.

La planche 9 regroupe l'ensemble des résultats obtenus pour toutes les valeurs α et h/D essayées, sous forme d'un diagramme $(Kp)'_R = f(Cq)$.

Figurent également sur cette planche :

- quelques résultats expérimentaux obtenus à l'Institut de Mécanique de fluides de TOULOUSE (16) sur des configurations de marche ($\alpha=0$) en écoulement plan et de révolution.

- La courbe théorique correspondant au calcul effectué suivant l'hypothèse d'une recompression isentropique sur la ligne de jet.

L'examen de cette planche met en évidence l'influence déterminante de la couche limite initiale et montre que le choix des paramètres Cq et $(Kp)'_R$ permet d'obtenir un très bon regroupement de l'ensemble des résultats. On en déduit notamment, que les variations $(Kp)'_R = f(\alpha)$ figurant pl. 8, ne font que traduire

l'effet de la variation du rapport de l'épaisseur δ_o^{**} , de la couche initiale à la longueur de la zone décollée largement évolutive en fonction de α (pl. 7).

On enregistre également sur la pl. 9 un écart assez sensible entre la courbe calculée dans l'hypothèse d'une recompression isentropique sur la ligne de jet et les résultats de l'expérience. Cet écart, qui s'amenuise toutefois lorsque C_q tend vers 0, montre qu'il n'est pas possible de négliger les effets visqueux dans le calcul du processus de recompression, spécialement lorsque la couche limite initiale est épaisse et lorsque les vitesses du courant de retour ne sont pas négligeables.

II.2.2.5 - Propriétés de similitude dans l'évolution des pressions lors du recollement :

La parenté étroite existant dans l'évolution des pressions jusqu'au point de recollement pour toutes les configurations expérimentées, conduit à examiner, ainsi que l'ont fait antérieurement ROSHKO et LAU (13), la possibilité d'établir une corrélation des résultats obtenus.

Les variables réduites proposées par ces auteurs :

$$\bar{x} = \frac{x}{x_R} \quad \bar{K}_p = \frac{P - P_1}{q_1}$$

ont été remplacées par des variables prenant en compte l'influence de la couche limite initiale sur la pression au point de recollement.

$$\bar{x} = \frac{x}{x_R} \quad \bar{w} = \frac{P - P_1}{P_R - P_1}$$

Les distributions de pression réduite obtenue pour différentes valeurs de α et h/D étudiées sont reproduites pl. 10.

Cette présentation met en relief une certaine similitude dans l'évolution des pressions jusqu'au point de recollement pour des configurations conduisant à des formes d'écoulements très variées en aval de ce point. Toutefois, à chaque valeur α correspond une courbe bien définie indépendante de h/D , notamment en ce qui concerne l'étendue du domaine quasi-isobare; les écarts entre ces diverses courbes bien que faibles sont loin d'être négligeables.

II.3 - Analyse des couches dissipatives.-

II.3.1 - Configurations retenues :

L'analyse détaillée du domaine de décollement et de recollement comportant un nombre élevé des mesures, n'a été effectuée que sur quelques configurations, choisies de manière à couvrir la majorité des cas susceptibles de se présenter en pratique et qui correspondent à des écoulements extérieurs accélérés ou retardés en aval du recollement.

Les évolutions des pressions pariétales pour les trois configurations retenues sont présentées fig. 11. On remarquera qu'elles comportent dans les 2 cas extrêmes $\alpha = 4^\circ$ et $\alpha = -7^\circ$, des gradients de pression de même intensité mais de signes opposés en aval du recollement la configuration intermédiaire $\alpha = 0,9^\circ$ correspondant sensiblement au cas de l'écoulement uniforme dans ce domaine.

Afin d'obtenir des effets de couche limite initiale à peu près identiques, les hauteurs de marche ont été choisies de manière à conduire à des longueurs de zone décollée assez voisines. L'exploitation des résultats porte essentiellement sur l'étude des conditions de recollement.

II.3.2 - Epaisseurs caractéristiques :

A partir des profils de vitesse on obtient par intégration, les épaisseurs caractéristiques de déplacement δ^* , de quantité de mouvement δ^{**} et d'énergie cinétique δ^{***} dont l'évolution en fonction de x est présentée pl. 12 pour les 3 configurations $\alpha = +4^\circ, -0,9^\circ, -7^\circ$.

D'une façon générale on observe :

- Une croissance de δ^{**} et δ^{***} généralement plus accusée dans le domaine de recollement;
- L'existence d'une valeur minimale de l'épaisseur de déplacement δ^* , située en aval du point de recollement R .

Par contre, le développement de la frontière δ de la couche dissipative dépend fortement de la configuration étudiée : pour $\alpha = +4^\circ$, où l'écoulement est accéléré en aval du décollement, cette frontière présente un col situé en aval de R , au-delà de ce minimum, δ croît lentement.

Pour $\alpha = -0,9^\circ$ le col se situe sensiblement au niveau de R et la croissance $\delta(x)$ au-delà de ce point est rapide.

Dans le cas $\alpha = -7^\circ$ où l'écoulement est ralenti, $\delta(x)$ est une fonction toujours croissante; cet épaississement devient extrêmement important après le recollement.

Ces résultats montrent que la condition $df/dx = 0$ en R n'apparaît que fortuitement pour des configurations particulières du recollement et ne peut être considérée comme une propriété générale.

II.3.3 - Paramètres de forme :

Les paramètres de forme les plus usuels que l'on peut définir à partir des épaisseurs caractéristiques de la couche limite

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \quad \bar{H} = \frac{\delta^{***}}{\delta^{**}} \quad \tilde{H} = \frac{\delta - \delta^*}{\delta^{**}}$$

ont été calculés, leurs évolutions en fonction de l'abscisse réduite sont fournies par la planche 13.

Sur chaque diagramme $H(x/x_R)$, $\bar{H}(x/x_R)$ et $\tilde{H}(x/x_R)$

figurent 3 courbes correspondant à $\alpha = -7, -0,9, +4$ qui sont généralement distinctes, mais présentent toutefois des propriétés communes au voisinage du point de recollement :

$\bar{H}(x/x_R)$ et $\tilde{H}(x/x_R)$ passent par une valeur minimale à proximité immédiate de R ,

$H(1)$ est sensiblement constant ($H(1) \approx 3,2$); les courbes

(5)

relatives aux configurations sont pratiquement confondues en aval de R sur une étendue de l'ordre de $0,25 x_R$ et se différentient au-delà, pour tendre vers une valeur de H inférieure, égale ou supérieure à celle de la plaque plane, selon que l'écoulement est accéléré, uniforme ou retardé. Les variations sont présentées planches 14, 15. Les corrélations obtenues sont excellentes spécialement pl. 14.

Le regroupement moins satisfaisant obtenu pl. 15, s'explique vraisemblablement par l'imprécision qui comporte la détermination du paramètre $\tilde{H} = \frac{\delta - \delta^*}{\delta^{**}}$; celle-ci fait intervenir l'épaisseur physique δ dont la mesure expérimentale n'est pas rigoureusement assurée. On remarquera en outre :

- que $\tilde{H}$ passe par un minimum au voisinage du point de recollement $\tilde{H}_R = \tilde{H}(1) \approx 1,5$
- que l'évolution $\tilde{H}(H)$ des profils de vitesse dans la zone de réhabilitation est identique à celle qui est obtenue pour les couches limites non décollées et résulte des corrélations effectuées par ROTTA et WIEGHARDT.

II.4 - Conclusion de l'étude expérimentale -

L'exploration détaillée du champ de vitesses et de pressions au voisinage d'une marche descendante, pour différentes inclinaisons de la paroi aval, a permis de dégager les propriétés caractéristiques suivantes, concernant les conditions de recollement d'un écoulement incompressible :

L'évolution des pressions pariétales $p(x)$, depuis le point de décollement 1 jusqu'au point de recollement R , conduit à une recompression $p_R - p_1$ qui ne dépend que de l'état de la couche limite initiale, caractérisé par l'épaisseur de quantité de mouvement

δ_0^{**} . Cette recompression obéit à une loi empirique

quasi-universelle $\frac{p_R - p_1}{q_1} = f(Cq)$, dans laquelle intervient le paramètre de perturbation $Cq = \frac{\delta_0^{**}}{x_R + x_0}$ déjà introduit dans les études de recollement supersonique (1-6).

Un choix convenable de variables réduites, de position

et de pression $\bar{w} = \frac{p - p_1}{p_R - p_1}$, permet d'améliorer la corrélation

proposée par ROSHKO et LAU, pour représenter cette évolution, en éliminant notamment les effets de couche limite initiale.

L'examen du champ de vitesse dans la zone de décollement et de recollement conduit à distinguer 3 domaines caractéristiques.

- Le premier correspond au développement d'une couche de mélange à partir de la couche limite initiale, suivant un processus classique. Les pressions évoluent peu dans le sens longitudinal.

- Le second dit de recompression s'étend jusqu'au point de recollement R . Il est caractérisé par une croissance rapide de la pression pariétale.
- Le troisième domaine est marqué par l'établissement progressif d'un profil de vitesse de couche limite dont la forme et les caractéristiques dépendent de l'écoulement extérieur et varient suivant que celui-ci est retardé, uniforme ou accéléré.

Au point de recollement R , les valeurs des paramètres de formes classiques H et $\bar{H}$ sont sensiblement constantes pour toutes les configurations étudiées, l'évolution $\bar{H}(\alpha)$ étant caractérisée par l'existence d'un minimum au voisinage de α_R .

III - ETUDE THEORIQUE - MODELE DE PRANDTL-BATCHELOR.

III.1 - Généralités -

Une des difficultés apparaissent dans l'étude théorique en écoulement incompressible du décollement au voisinage d'une marche descendante est l'impossibilité d'assurer une relation simple de couplage entre l'écoulement visqueux dans le domaine de recirculation D et l'écoulement extérieur non visqueux.

Par analogie avec les études effectuées dans le cas où l'écoulement extérieur est supersonique, on s'est donc efforcé tout d'abord de rechercher s'il existait dans le cas limite où la viscosité tend vers 0, une représentation schématisée des écoulements à l'intérieur et à l'extérieur de D aboutissant à une solution théorique dépendant d'un seul paramètre. Cette solution assurant la compatibilité des deux écoulements par égalités de pression le long de leur frontière commune, doit également être unique pour une valeur fixée du paramètre.

Une telle schématisation de la zone d'eau morte est obtenue en examinant un cas limite où le nombre de Reynolds du problème $u_\infty h/\nu$ devient très grand; ce cas a été étudié notamment par :

G.K. BATCHELOR dans le JOURNAL OF FLUID MECHANICS Vol. 1 - 1956 (Réf : 18, 19). BATCHELOR a montré que dans la zone de recirculation où les lignes de courant sont fermées et où l'écoulement est supposé permanent, le tourbillon est constant (fig. 16).

III.2 - Modèle de BATCHELOR.

Dans ces conditions, si on utilise le système de variables réduites $\bar{x} = x/h$; $\bar{y} = y/h$; $\bar{\psi} = \psi/h^2\omega$

les équations du mouvement deviennent :

$$(I) \quad \Delta \bar{\psi} = -1 \text{ à l'intérieur du domaine } D_I \text{ de recirculation.}$$

$$(II) \quad \Delta \bar{\psi} = 0 \text{ à l'extérieur (domaine } D_{II}) \text{ (fig. 16).}$$

Les conditions de compatibilité entre D_I et D_{II} sont alors les suivantes :

La frontière commune (j) est une ligne de courant pour D_I et D_{II} le long de laquelle $P_I = P_{II}$. Cette condition est notamment réalisée aux points A et C où $V_I = 0$, ce qui impose à partir des équations de BERNOLLI :

$$\frac{(P_I)_{II} - (P_I)_I}{1/2 \rho \omega^2 h^2} = \frac{V_{II}^2 - V_I^2}{\omega^2 h^2} = K \quad (\text{constante}).$$

Il s'en déduit également que (j) doit être tangente à la paroi en C et A.

Les conditions aux limites des équations (I) et (II) sont alors :

$$(II) \quad \bar{\Psi} = 0 \quad \text{sur la frontière A'ACC'}$$

$$\bar{\Psi} = \frac{U_\infty}{\omega h} \quad \text{à l'infini}$$

$$\bar{\Psi} = 0 \quad \text{sur la courbe fermée ABCA.}$$

III.3 - Recherche d'une solution numérique -

La constante K peut être considérée comme

le paramètre du problème; cette constante pourra être déterminée par exemple en discutant le saut de pression entre le point de décollement A et le point C de recollement.

On se propose donc de rechercher le processus itératif permettant de définir le contour inconnu (ligne de séparation (j)), la constante K étant supposée fixée.

Dans le cas où l'on trouve une solution unique, on obtient la distribution de vitesse V_{II}/V_∞ et $V_{II}/\omega h$ sur (j) et par suite la valeur de $\omega h/V_\infty$ qui correspond à la valeur de K choisie.

III.3.1 - Principe du processus itératif choisi :

Pour une valeur $K = K_0$ du paramètre, la ligne de séparation des deux zones peut être recherchée à l'aide du processus itératif suivant :

- a) On se donne une ligne de jet arbitraire (contour AC).
- b) On résoud numériquement l'équation (I) dans le domaine D_I (problème de POISSON) par une méthode de différences finies, ce qui donne le module de vitesse $V_I/\omega h$ le long de AC.
- c) Le couplage entre (I) et (II) par égalités de pression le long de la frontière commune AC permet d'avoir le module de vitesse $V_{II}/\omega h = V_2$ le long de (j) dans le domaine D_{II} .
- d) On résoud numériquement l'équation (II) dans le domaine D_{II} avec les conditions aux limites qui seront indiquées ultérieurement, ce qui donne la pente locale θ_{II} de la ligne de séparation AC ;

- e) La connaissance de V_{II}/ω et Θ_{II} permet de déterminer un nouveau contour AC, et le cycle de calculs recommence jusqu'à convergence de la solution, cette convergence étant vérifiée à posteriori.

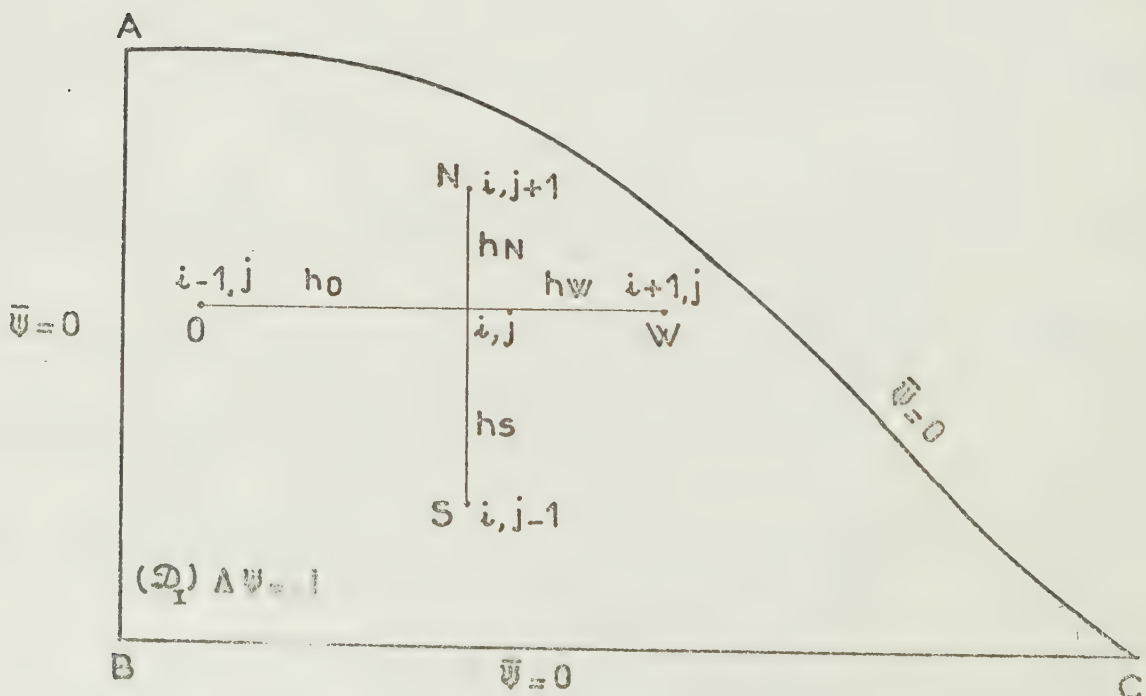
Nous allons maintenant passer en revue les différents problèmes de calculs rencontrés au cours de ce processus itératif.

III.3.2 - Zone intérieure : Problème de POISSON :

Pour la zone intérieure, on a à résoudre un problème de POISSON

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Psi} &= -1 && \text{dans } D_I && (I) \\ \bar{\Psi} &= 0 && \text{sur le contour ABCA.} \end{aligned}$$

La solution peut être obtenue par une méthode basée sur l'analogie rhéoelectrique; soit avec la technique de papier télédeltos, soit à la cuve; dans le premier cas, le plus rapide, la précision est toutefois insuffisante; par ailleurs, le processus itératif choisi nécessite la réalisation matérielle d'un modèle à chaque itération, ce qui alourdit et complique considérablement le procédé. On a donc fait appel à une technique numérique de calcul sur ordinateur basée sur la méthode classique des différences finies.



L'équation (I) écrite sous forme discrétisée en chaque point d'un maillage rectangulaire conduit à la relation :

$$a_{i,j} \bar{\psi}_{i,j} + a_{i+1,j} \bar{\psi}_{i+1,j} + a_{i-1,j} \bar{\psi}_{i-1,j} + a_{i,j-1} \bar{\psi}_{i,j-1} + a_{i,j+1} \bar{\psi}_{i,j+1} = \bar{\psi}_{i,j}$$

dans laquelle les $a_{i,j}$ sont des constantes dépendant du maillage :

$$a_{i,j} = -2 \left(\frac{1}{h_s h_N} + \frac{1}{h_o h_w} \right) \quad a_{i+1,j} = \frac{2}{h_w(h_o + h_w)}$$

$$a_{i-1,j} = \frac{1}{h_o(h_o + h_w)} \quad a_{i,j-1} = \frac{2}{h_s(h_s + h_N)} \quad a_{i,j+1} = \frac{2}{h_N(h_s + h_N)}$$

On aboutit ainsi à un système d'équation linéaire à résoudre.

La solution est obtenue par une méthode itérative de surelaxation par points. Le paramètre de surelaxation Ω est défini par :

$$\bar{\psi}_{i,j} = \Omega \bar{\psi}_{i,j}^{k+1} + (1 - \Omega) \bar{\psi}_{i,j}^k$$

$\bar{\psi}_{i,j}^k$ est la valeur de la fonction $\bar{\psi}$ au point i, j à l'itération k .

$\bar{\psi}_{i,j}^{k+1}$ est la valeur de la fonction $\bar{\psi}$ au point i, j à l'itération $k + 1$.

Le critère de convergence étant $\left| \frac{\bar{\psi}_{i,j}^{k+1} - \bar{\psi}_{i,j}^k}{\bar{\psi}_{i,j}^k} \right| < \epsilon$ pour tout point i, j .

Pour une précision $\epsilon = 10^{-5}$ et un maillage de 10 pas sur $AB = 1$ et de 40 pas sur $BC = 4$, la frontière étant sinusoïdale, la valeur optimum de Ω est égale à 1,6, le nombre nécessaire N d'itération correspondant est égal à 30 (pl. 16 b). Sur cette planche, figure aussi la courbe de répartition de vitesse $V_1/\omega h$ sur la ligne de jet AC donnée par le calcul et par la technique du papier télédeutos.

III.3.3 - Problème extérieur :

III.3.3.1 - Cas du domaine illimité :

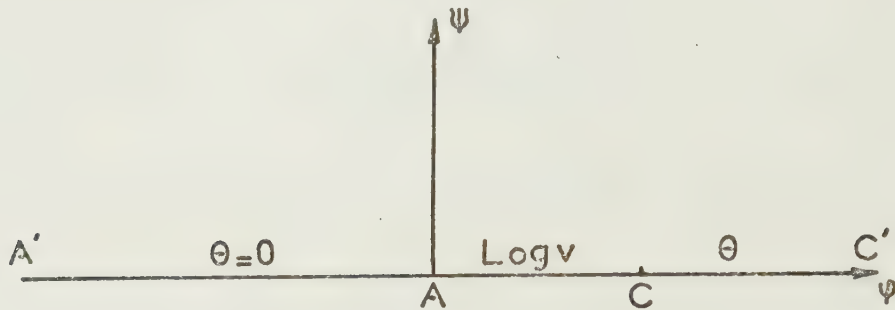
Le problème de calcul de la zone extérieure irrotationnelle peut être posé de la façon suivante :

On se propose de déterminer l'inclinaison locale de la vitesse le long de AC situé sur la frontière $\psi = 0$ de l'écoulement extérieur connaissant θ sur AA' ($\theta = 0$) et sur CC' ($\theta = \text{cte}$) et le module de la vitesse V sur AC.

Le potentiel complexe étant $f = \psi + i\chi$; la vitesse complexe est $W = u - i v = df/dz$ avec $W = V e^{-i\theta}$

f est une fonction analytique de $Z = x + iy$ par conséquent de W ou de $-\log W = -\log V + i\theta$. Inversement $-\log V + i\theta$ est une fonction analytique de f

Dans le plan du potentiel complexe φ, ψ , l'écoulement extérieur est représenté sur le demi-plan supérieur.



Le problème du calcul de l'écoulement extérieur se ramène donc à déterminer dans ce demi-plan une fonction analytique $-\text{Log } v + i\theta$ satisfaisant aux conditions aux limites :

$$\theta = 0 \quad \text{sur } A'A$$

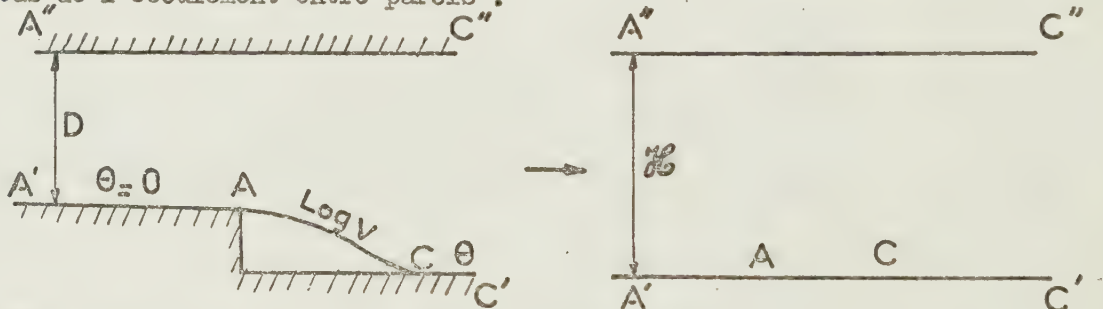
$$\theta = 0 \quad \text{ou constante sur } CC'$$

$$\text{Log } V \quad \text{connu sur } AC$$

$$\text{Log } V = \text{Log} \left(\frac{U_\infty}{\omega h} \right) \quad \text{à l'infini.}$$

La solution de ce problème classique de Volterra permet de déterminer θ sur le segment AC (annexe 1).

III.3.3.2 - Cas de l'écoulement entre parois :



En présence d'une paroi supérieure, l'écoulement extérieur dans le plan de potentiel complexe $f = \varphi + i\psi$ est représenté par une bande dont la largeur $\mathcal{H}$ est définie de manière à satisfaire aux conditions de débit dans le plan physique.

En faisant correspondre cette bande à un demi-plan par la transformation conforme $f = (\mathcal{H}/\pi) \text{Log } F$, on est donc ramené au problème précédent.

III.3.4 - Calcul du nouveau contour résultant du couplage de I et II :

Connaissant $V_{II} = v_{II}/\omega h$ (problème intérieur + égalité de pression à la frontière AC) et θ_{II} (problème extérieur), la ligne de séparation AC est alors déterminée de la façon suivante :

On a :

$$V_{II} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{s}}$$

d'autre part, $d\bar{s} = \frac{d\bar{x}}{\cos \theta_{\pi}} = \frac{d\bar{y}}{\sin \theta_{\pi}}$

Ce qui donne, $d\bar{x} = \frac{\cos \theta_{\pi}}{V_{\pi}} d\bar{\varphi}$
 $d\bar{y} = \frac{\sin \theta_{\pi}}{V_{\pi}} d\bar{\varphi}$

La hauteur h du nouveau contour est donc :

$$h = \int_{\bar{\varphi}_A}^{\bar{\varphi}_c} \frac{\sin \theta_{\pi}}{V_{\pi}} d\bar{\varphi}$$

et son équation s'écrit sous forme paramétrique :

$$\bar{x} = \frac{1}{h} \int_{\bar{\varphi}_A}^{\bar{\varphi}_c} \frac{\cos \theta_{\pi}}{V_{\pi}} d\bar{\varphi}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{h} \int_{\bar{\varphi}_A}^{\bar{\varphi}_c} \frac{\sin \theta_{\pi}}{V_{\pi}} d\bar{\varphi}$$

III.3.5 - Etude de la convergence du processus itératif; unicité du problème (pl. 17 et 18) :

La donnée initiale (0) arbitrairement choisie, est une sinusoïde de longueur 5 qui part et aboutit tangentielllement à la paroi.

La convergence est obtenue au bout de $K = 9$ itérations, pour les conditions suivantes :

$$\left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \right| < 0,01 \text{ et } \left| \frac{y_k - y_{k-1}}{y_k} \right| < 0,01$$

k l'indice indiquant le numéro de l'itération correspondante.

On constate que lorsque k augmente, les courbes successives oscillent autour de la courbe finale avec une amplitude de plus en plus faible.

Pour montrer que la solution ainsi obtenue pour la valeur K de la constante de BATCHELOR fixée est unique, le même processus itératif a été effectué avec différentes conditions initiales. Des sinusoïdes de longueur l/h variables de 2,5, 5, 10, 20 ont été choisies comme conditions initiales. Pour toutes ces courbes, la même solution finale identique à la précédente a été trouvée, quelle que soit la condition initiale choisie. On peut donc raisonnablement conclure que le procédé conduit à une solution numérique unique.

III.3.6 - Examens critiques de la solution obtenue :

Lorsque l'on fait varier la constante K , on obtient une famille de courbes $V/V_{\infty}(x/h)$ à un paramètre. Lorsque K augmente, la longueur relative du domaine de recirculation croît corrélativement, tandis que l'écart entre la vitesse maximale et la vitesse minimale diminue (pl. 19).

L'écoulement de recirculation présente un point d'arrêt au point de décollement A et un point d'arrêt au point de recollement C; l'égalité de pression entre les écoulements établis de part et d'autre de (J) impose donc en ces points la même vitesse de l'écoulement extérieur, ce qui est physiquement inacceptable.

III.4 - Recherche d'un modèle physique plus réaliste -

III.4.1 - On est donc amené à rechercher un modèle physiquement plus réaliste en essayant d'éliminer la condition d'arrêt au point A de l'écoulement intérieur. Pour ce faire, la marche est prolongée au point A par une plaque mince de longueur variable l_p parallèle à la paroi, délimitant une cavité (planche 20); dans ces conditions, le point de décollement de l'écoulement extérieur ne correspond plus au point d'arrêt de l'écoulement de recirculation.

La répartition de vitesse sur la ligne de jet (j) de la zone de recirculation a été calculée pour différentes profondeurs l_p . On constate que, lorsque $l_p/h > 2$, l'étendue de la cavité n'a plus d'influence sur la répartition $V_x / \omega h$ de la vitesse de la zone intérieure, le long de la ligne de jet (j), donc sur la détermination de la ligne de séparation (j).

Compte tenu de cette modification de la forme la convergence et l'unicité numérique du modèle ont été recherchées et obtenues pour différentes valeurs fixées du paramètre K (pl. 21).

Les répartitions de vitesse sur la ligne de jet (j) ainsi calculées sont présentées pl. 22. On remarque que la cavité n'a aucune influence sur la répartition de vitesse extérieure, si $l_p/h \geq 2$. Lorsque $l_p/h \approx 2$, cette influence n'est apparente qu'au voisinage immédiat du point de décollement A.

D'autre part, l'examen des courbes de la pl. 22, révèle que la vitesse V_{II} diminue continûment depuis le point de séparation jusqu'au point de recollement et qu'il n'apparaît pas à l'aval immédiat du point de séparation, un plateau où la vitesse et la pression de l'écoulement extérieur sont sensiblement constantes. Ceci est contraire à l'expérience, comme le montrent les résultats de la planche 10 ainsi que ceux qui ont été regroupés par ROSHKO et LAU (pl. 23).

En fait, la zone isobare occupe une étendue L_i de l'ordre de $L_i/L = 0,45$, L étant la longueur séparant le point de décollement A du point où la pression est maximale. Cette valeur L_i/L est sensiblement constante pour des configurations d'écoulements très variées.

Dans ces conditions, et pour tenir compte des phénomènes physiques, on est conduit à modifier légèrement le modèle précédent.

III.4.2 - Modèle proposé : (pl. 24)

Les courbes de répartition longitudinale de vitesse expérimentale, à l'aval de la marche descendante devant présenter une partie constante égale à une certaine fraction de la longueur totale de la zone de recirculation, on obtiendra nécessairement :

- a) pour la zone extérieure, une allure légèrement descendante de la ligne de jet,
- b) pour la zone intérieure, une ligne de jet ayant une partie horizontale.

Les conditions de couplage entre I et II ne peuvent donc être strictement satisfaites le long de cette partie isobare AA_1 de la ligne de séparation AC. Afin de respecter cette condition d'uniformité de pression suivant AA_1 pour l'écoulement extérieur, on est amené à remplacer cette partie AA_1 de la ligne de jet par une paroi courbée, le long de laquelle on imposera que la vitesse extérieure soit constante (Annexe 2a).

La longueur relative L_i/L de la partie isobare étant choisie égale à 0,45, les répartitions de vitesse longitudinale pour les différentes valeurs du paramètre K ont été déterminées; on constate que la courbe expérimentale de référence est située entre les courbes calculées à l'aide de ce processus itératif pour $K = 0,2$ et $K = 0,22$ (pl. 24). Cette courbe de référence a été déduite de la série d'essais présentée dans la première partie de ce mémoire, en tenant compte des effets de couche limite initiale et de limitation transversale de l'écoulement par une paroi supérieure.

III.4.3 - Généralité de la solution obtenue

On remarque que la constante K, de BATCHELOR peut s'écrire :

$$K = \frac{(P_c)_M - (P_c)_R}{1/2 \rho \omega^2 h^2} = \frac{V_c^2}{\omega^2 h^2} = \frac{(P_1 - P_c) / \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 + V_1^2 / V_\infty^2}{\omega^2 h^2 / V_\infty^2} = \frac{(V_1 / V_\infty)^2 \left[1 - \frac{P_1 - P_c}{q_1} \right]}{\omega^2 h^2 / V_\infty^2}$$

V_c étant la vitesse de l'écoulement extérieur au point C

P_c étant la pression au point C

P_1 étant la pression au point de décollement A

Cette expression fait intervenir le saut de pression réduit $\frac{P_1 - P_c}{q_1}$ existant entre le point A et le point C, qui dans le cas de la configuration envisagée est dans un rapport sensiblement constant sur le saut de pression au point de recollement :

$$\frac{P_c - P_1}{P_R - P_1} \approx cte = \text{constante (pl. 23)}$$

$\frac{P_R - P_1}{q_1}$ s'exprimant en fonction de $\frac{\delta_o^{**}}{x_R + x_o}$ par la corrélation quasi universelle de la pl. 9 $\frac{P_c - P_1}{q_1}$ obéit donc à une loi du même type. Et l'on est ainsi conduit à rechercher dans quelle mesure, cette loi détermine l'essentiel de l'évolution de la constante K lorsque δ_o^{**}/h varie. Dans ce but, les réseaux de courbes $L/h = f_1(D/h)$, $Kp_1 = f_2(D/h)$ et $\Delta Kp = \frac{P_c - P_1}{q_1} = f_3(D/h)$ ont été établis pour différentes valeurs de K (pl. 25 à 27).

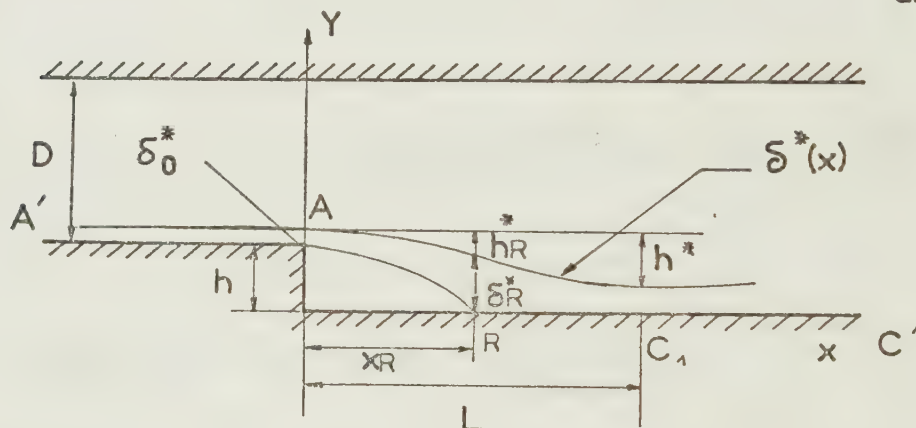
Le diagramme de la pl. 27 ($\Delta Kp = f_3(D/h)$) permet de définir par comparaison avec l'expérience une relation $K = f(\delta_o^{**}/x_R + x_o)$. Si cette relation est générale, les courbes $L/h = f_1(D/h)$ et $Kp_1 = f_2(D/h)$ calculées pl. 25 et 26 doivent être également vérifiées par l'expérience. Il n'en est malheureusement pas ainsi. A titre d'exemple, les mesures effectuées montrent que le paramètre $\delta_o^{**}/x_R + x_o$ est pratiquement sans influence sur l'étendue de la zone décollée (pl. 7) alors que L/h varie sensiblement avec K (pl. 25). Il n'existe donc pas de relation très générale $K = f(\frac{\delta_o^{**}}{x_R + x_o})$ permettant d'assurer simultanément la coïncidence des pressions de culot et de l'étendue de la zone décollée entre le modèle théorique étudié et l'expérience.

404

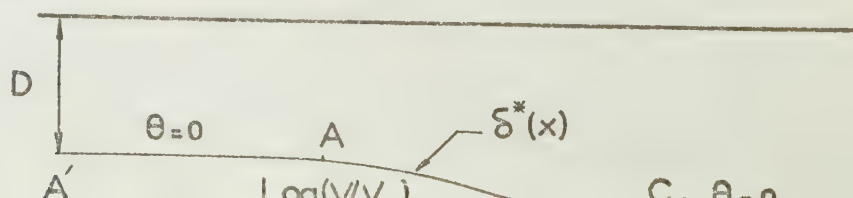
IV-1 - Généralités -

Le calcul de $\delta^r(x)$ est un élément déterminant dans la résolution des problèmes de recollement envisagés dans la suite de ce travail.

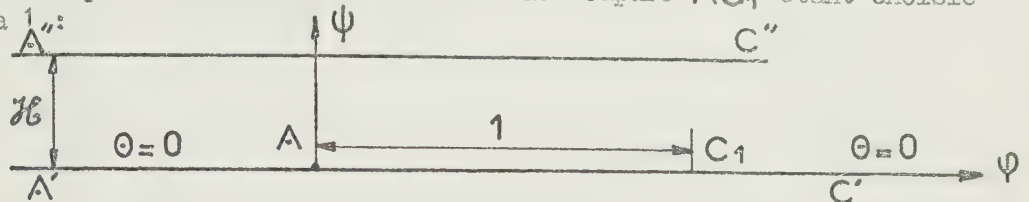
Les paramètres géométriques essentiels de l'écoulement réel en aval d'une marche descendante sont indiqués sur la figure ci-après : hauteur D de la veine en amont du décollement, hauteur h du décrochement, frontière $\delta^*(x)$. Le point R représente le point de recollement, tandis que C_1 est le point pour lequel $\frac{d\delta^*}{dx} = 0$



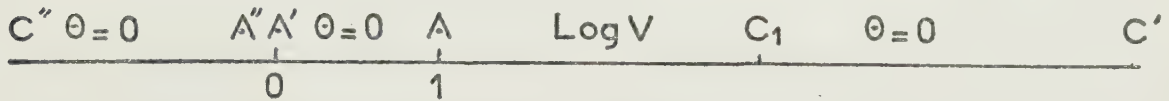
Pour celà, le processus de calcul suivant a été utilisé : en fluide parfait et dans le cas de parois amont et aval parallèles: Une répartition de vitesse $V/V_\infty(x)$ étant donnée sur la ligne de courant frontière $\delta^*(x)$ déterminer la géométrie du canal $(D, h, \delta^*(x))$ avec les conditions aux limites sur A, A', C, C' indiqués sur la figure ci-après.



Dans le plan du potentiel complexe φ, ψ on obtient alors, $\mathcal{H}$ étant le débit correspondant à la hauteur D et la coupure AC_1 étant choisie égale à 1 :



De même dans le demi plan transformé de la bande précédente (III-3.3.2), on a :



Le débit $\mathcal{H}$ n'étant pas connu au départ, il faut donc le déterminer de telle sorte que la répartition de vitesse en module prenne des valeurs connues le long de AC_1 ; la solution proposée est du type itératif : on traite tout d'abord le problème (A) (problème direct) dont le mode de résolution est le suivant :

Données : (plan φ, ψ)

$$AC_1 = 1$$

$$U_\infty = 1$$

$\mathcal{H}$

$V/U_\infty(\varphi)$ sur AC_1

$\theta = 0$ sur $A'A, C_1C'$ et $A''C''$

Résultats :

détermination des inclinaisons

$\theta(\varphi)$ de la vitesse le long de AC_1

On notera que dans le premier calcul de cette séquence $V/U_\infty(\varphi)$ est obtenu en faisant $\theta = 0$ dans la relation exprimant $d\psi$:

$$d\psi = (V/U_\infty) d\bar{x} / \cos \theta \quad (1)$$

On résout ensuite un problème inverse (B) de la manière suivante :

Données : (plan φ, ψ)

$$AC_1 = 1$$

$$U_\infty = 1$$

$\mathcal{H}$

$\theta(\varphi)$ sur $A'C'$

Résultats :

détermination de la répartition de vitesse $V/U_\infty(x)$ sur AC_1

La répartition $V/U_\infty(x)$ obtenue par (B) est en général différente de la donnée initiale.

Une autre valeur de $\mathcal{H}$ est alors choisie et le cycle de calculs recommence jusqu'à ce que l'on trouve les valeurs $V/U_\infty(x)$ qui ont été fournies au départ.

On peut alors calculer la frontière inférieure $\bar{y}_1(\bar{x}) = \bar{\delta}^*(\bar{x})$ de l'écoulement de fluide parfait, $\bar{y}$ et $\bar{x}$ étant définis par : $\bar{y} = y/h^*$, $\bar{x} = x/h^*$

Ces opérations ont été effectuées pour toutes les hauteurs de marche expérimentées en particulier pour la configuration $h = 24$ mm sur laquelle on dispose d'une exploration détaillée de la zone décollée et de la zone de redéveloppement de la couche limite turbulente. Des recoupements très satisfaisants entre les calculs et l'expérience ont été obtenus (planche 29).

Ces recoupements montrent que la relation de couplage entre la couche limite et l'écoulement extérieur irrotationnel peut s'écrire dans la forme simplifiée.

$$\frac{d\delta^*}{dx} = \operatorname{tg} \theta$$

Par ailleurs, la condition $\theta = 0$ imposée à partir d'une abscisse C_1 égale à deux fois celle du maximum de pression, n'introduit pas d'erreur appréciable comme le confirme l'évolution de θ donnée planche 28.

IV-2 - Calcul de l'écoulement derrière une marche à partir d'une loi empirique quasi-universelle représentant l'évolution des pressions.

IV-2.1 - Principe :

La répartition des pressions pariétales en aval de la marche est représentée sur la planche 10 dans le système de variables réduites $\bar{W} = (p - p_1)/(p_R - p_1)$ et x/x_R qui permet un regroupement de l'ensemble des résultats expérimentaux. Cette loi de pression est sensiblement unique jusqu'au point de recollement pour les différentes hauteurs de la marche. En se limitant au cas où le plancher inférieur en amont et en aval de la marche est parallèle à la paroi supérieure, l'unicité de la loi de pression $\bar{W}(x/x_R)$ s'étend sensiblement jusqu'au point C_1 où $d\delta^*/dx = 0$ (planche 31).

Toutefois lorsque D/h est petit une légère correction concernant les conditions aux limites aval doit être introduite. Dans les calculs que nous avons effectués, il a été supposé que l'évolution décroissante des vitesses était sensiblement linéaire entre le point x_M où la pression est maximale et le point C_1 défini arbitrairement par la condition $x_{C_1}/x_M = 2$, justifiée § IV-1.2.

La loi de BERNOLLI appliquée à l'écoulement non visqueux le long de la frontière de déplacement $\delta^*(x)$, du plancher inférieur du canal permet d'écrire :

$$\bar{W} = \frac{p - p_1}{p_R - p_1} = \frac{1 - \left(\frac{V}{V_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{V_R}{V_1}\right)^2}$$

La distribution $\bar{W}(x/x_R)$ étant donnée, l'évolution des vitesses V/V_1 le long de $\delta^*(x)$ est alors représentée par la relation :

$$(1) \quad \frac{V}{V_1} = \sqrt{1 - \bar{W} \left(1 - \left(\frac{V_R}{V_1}\right)^2\right)}$$

Si d'autre part, le saut de pression au recollement :

$$(2) \quad (Kp)_R = \frac{p_R - p_1}{q_1} = 1 - \left(\frac{V_R}{V_1}\right)^2 = k$$

est connu, V/V_1 devient une fonction de x/x_R seul, définie à partir de (1) et (2).

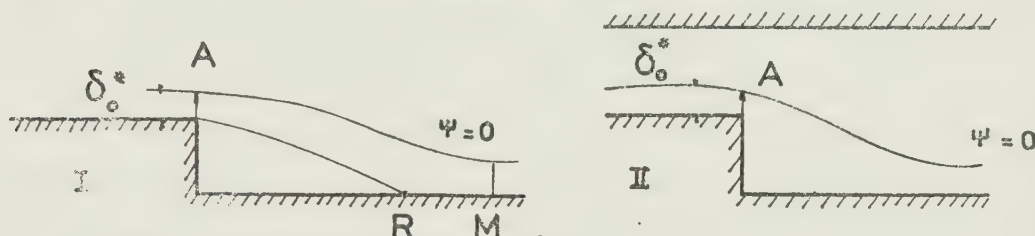
L'expérience montre (planche 9) que $(Kp')_R$ est une fonction quasi-universelle du paramètre $Cq = \delta_o^{**}/(x_R x_o)$ caractérisant l'influence de la couche limite initiale; (2) s'écrit donc :

$$(2') \quad (Kp')_R = k \left(\frac{\delta_o^{**}}{x_R + x_o} \right)$$

(1) et (2') étant connus, la solution d'un problème de recollement est alors ramené à la détermination de la pression isobare p_1 , c'est-à-dire de la vitesse V_1 et du facteur d'échelle x_R .

Rappelons que nous nous plaçons dans le cas particulier où l'inclinaison de la paroi est sensiblement nulle de part et d'autre de la marche descendante. Supposons que nous connaissions également l'épaisseur de quantité de mouvement et de déplacement $\delta_o^{**}, \delta_o^*$ de la couche limite en A.

Dans ces conditions, si l'on se fixe à priori la longueur x_R de la zone décollée, il est alors possible à partir des relations (1) et (2') de calculer la distribution de vitesse $V/V_\infty A$ en C_1 ou $d\delta^*/dx=0$ et d'en déduire, θ étant connu en amont de A et en aval de C_1 :



a) la ligne de courant frontière $\psi=0$;

b) la loi d'évolution le long de cette ligne du rapport $\frac{V}{V_\infty} \left(\frac{x}{R} \right)$ de la vitesse locale V à la vitesse à l'infini amont V_∞ supposée uniforme.

Le calcul peut être effectué aussi bien dans le cas où l'écoulement est transversalement illimité (figure I) que dans le cas contraire (figure II), d'une manière analogue à celle qui a été exposée § IV-1. Nous l'appellerons : solution du problème extérieur.

Examinons maintenant l'évolution des couches dissipatives le long de la paroi en aval de A. Nous supposons bien sûr, que cette évolution est gouvernée par les équations de la couche limite. En particulier, les variations de δ^* et δ^{**} obéissent à l'équation de KARMAN qui s'écrit sous sa forme incompressible classique :

$$(3) \quad \frac{d\delta^{**}/x_R}{dx/x_R} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dx/x_R} \left[2 \frac{\delta^{**}}{x_R} + \frac{\delta^*}{x_R} \right] = \frac{cf}{2} \neq 0$$

Dans cette équation V est la vitesse locale à l'extérieur de la couche limite que nous supposons égale à celle qui a été calculée sur la ligne $\psi=0$ et cf , le coefficient de frottement pariétal sensiblement nul dans le domaine de recollement.

Multiplions l'équation (3) par V^2 et intégrons membre à membre, on obtient alors :

$$(4) \quad \frac{\delta^{**}}{x_R} = -\frac{\delta^*}{2x_R} + \frac{1}{V^2} \int_0^{x/x_R} \frac{1}{2} V^2 \frac{d\delta^*}{dx} \frac{dx}{x_R} + \frac{\delta_o^{**} V^2(o)}{x_R V^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta_o^* V^2(o)}{x_R V^2}$$

$\delta^* x_R$ et $\delta^{**} x_R$ étant respectivement les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement en A ou $x=0$, qui sont supposées connues.

L'équation (4) s'écrit, sachant que $\frac{d\delta^*}{dx} = \lg \theta$ et $\delta^{**} = \frac{\delta^*}{H}$:

$$(5) \quad \frac{\delta^*}{x_R} \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2V^2} \int_0^{x_R} V^2 \lg \theta dx_{x_R} + \left[\frac{\delta_0^{**}}{x_R} + \frac{1}{2} \frac{\delta_0^*}{x_R} \right] \frac{V^2(0)}{V^2}$$

Le second membre de cette expression est une fonction aisément calculable de x/x_R . Au point de recollement (5) devient :

$$(6) \quad \frac{\delta_R^*}{x_R} \left(\frac{1}{H_R} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2V_R^2} \int_0^1 V^2 \lg \theta dx_{x_R} + \left[\frac{\delta_0^{**}}{x_R} + \frac{1}{2} \frac{\delta_0^*}{x_R} \right] \frac{V^2(0)}{V^2}$$

Si l'on se reporte aux figures de la planche 14, on voit que H_R est sensiblement constant et égal à 3,2. Nous retiendrons cette valeur comme caractéristique des conditions de recollement. Nous obtiendrons alors :

$$(6') \quad 0,81 \frac{\delta_R^*}{x_R} = \frac{1}{2V_R^2} \int_0^1 V^2 \lg \theta dx_{x_R} + \left[\frac{\delta_0^{**}}{x_R} + \frac{1}{2} \frac{\delta_0^*}{x_R} \right] \frac{V^2(0)}{V^2}$$

relation qui définit $\frac{\delta_R^*}{x_R}$ et permet donc :

- d'une part, de positionner la paroi de recollement,
- d'autre part, de calculer $\frac{h}{x_R} = \lambda_0$ pour la configuration étudiée, et par suite h à partir de la valeur x_R initialement choisie. Si cette valeur de h ne coïncide pas avec celle du problème à traiter, le cycle de calcul doit être recommencé en choisissant une nouvelle valeur de $x_R = h/\lambda_0$, un nouveau couple de valeurs $\delta_0^*, \delta_0^{**}$ fourni par un calcul de couche limite en amont de A à partir de la loi de vitesse trouvée et de répéter les opérations précédentes jusqu'à convergence du procédé.

Nous avons ainsi défini une méthode de tir, permettant de traiter le problème du recollement d'une marche descendante, située sur une paroi plane. L'organigramme de cette technique de calcul est donné Annexe 3. Elle est basée sur l'existence d'un critère de recollement simple d'un écoulement turbulent qui consiste à supposer comme le montre l'expérience que le paramètre de forme H_R au point de recollement est constant et égal à 3,2.

IV-2.2 - Comparaison avec l'expérience.

La méthode ainsi définie, permet de calculer des répartitions longitudinales $k_p(x)$ qui sont en très bon accord avec l'expérience, pour différentes valeurs de la hauteur de marche : $h = 8, 12, 16, 20, 24$ et $31,5$ mm (planches 32 à 37).

En particulier, la pression de culot, à priori inconnue, est prévue de façon très satisfaisante. D'autre part, les valeurs $\delta^*(x)$ et $\delta^{**}(x)$ obtenues sont assez proches de celles qui ont été mesurées seulement dans le cas $h = 24$ mm (planches 29 et 38). Cette méthode de calcul est donc assez satisfaisante mais elle ne peut s'appliquer avec succès que dans le cas où l'écoulement est rapidement uniforme en aval du recollement ($\theta=0$). Lorsqu'il n'en est pas ainsi (θ variable), la distribution $\bar{w}(x/x_R)$ ne présente plus un caractère universel (pour $x/x_R > 1$) et la méthode proposée n'est plus applicable telle quelle. Cette constatation nous a donc conduit à rechercher une méthode plus générale, faisant intervenir le développement de la couche limite d'une manière plus détaillée.

IV-3 -- Calcul de l'écoulement derrière une marche à partir des données empiriques sur les paramètres de forme $\bar{H}(H)$ et la fonction de dissipation Φ --

IV-3.1 -- Généralités : On a vu que l'évolution de la couche limite turbulente au voisinage du point de recollement peut être caractérisée par l'existence d'une famille de profils de vitesse à un paramètre.

Cette propriété qui a été reconnue par différents auteurs (MULLER, KORST, LEES) nous a incité à examiner la validité d'une méthode de calcul des couches limites au recollement basée sur l'utilisation des corrélations empiriques mises en évidence par l'analyse expérimentale.

IV-3.2 -- Position du problème et principe de la solution --

IV-3.2.1 -- Lois empiriques utilisées.

La discussion présentée § II.3, concernant l'évolution des couches dissipatives dans 3 cas typiques, a permis de montrer qu'il existait en premier lieu une relation très générale entre les paramètres de forme $\bar{H} = \delta^{***} / \delta^{**}$, $H = \delta^* / \delta^{**}$ des profils de vitesse se situant dans les domaines de recollement et de redéveloppement de la couche limite.

Nous rappellerons pour mémoire les définitions usuelles de :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho_u}{\rho_{ue}}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho_u}{\rho_{ue}} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy, \quad \delta^{***} = \int_0^\delta \frac{\rho_u}{\rho_{ue}} \left(1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right) dy$$

Ainsi que le montre la planche 14, cette corrélation $\bar{H}(H)$ regroupe tous les résultats d'essais avec une dispersion minime.

D'autre part, la fonction de dissipation $\Phi = \frac{1}{\rho_{ue}^3} \int_0^\delta \tau \frac{\partial u}{\partial y} dy$ a été calculée en fonction de x pour les différentes configurations étudiées.

Connaissant la loi d'évolution $H(x)$ pour chaque cas traité, il est alors possible de rechercher s'il existe une relation assez universelle entre Φ et H .

Cette corrélation est présentée planche 39. Bien que la dispersion des points expérimentaux soit plus importante que dans le cas précédent, on remarquera que les écarts par rapport à une courbe moyenne ne présentent pas un caractère très systématique mettant en évidence une évolution marquée propre à chaque configuration d'essai.

La courbe moyenne que l'on peut définir est très voisine de celle proposée par ALBER et LEES (planche 39).

Disposant ainsi de 2 relations empiriques $\bar{H}(H)$ et $\Phi(H)$ nous allons maintenant examiner comment peut être conduit le calcul de la couche limite de part et d'autre du point de recollement.

IV-3.2.2 - Equations de base.-

Le calcul du recollement incompressible utilise les équations suivantes :

- a) Equation de KARMAN (équation intégrale des quantités de mouvement)

$$(1) \quad \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}}{V}(H+2)\frac{dV}{dx} - \frac{cf}{2} = 0$$

Dans cette équation, la définition de V est identique à celle qui a été choisie § IV-2.1. Le frottement cf peut être négligé jusqu'au recollement; en aval, cf est fourni par la relation de LUDWIG-TILLMANN.

$$(1') \quad cf = \frac{0,246}{\left(\frac{V\delta^{**}}{V}\right)^{0,268}} \cdot 10^{-0,678H}$$

cf est une fonction de x , δ^{**} et $H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$

- b) Equation intégrale de l'énergie cinétique (obtenue par intégration de 0 à δ de l'équation des quantités de mouvement, multipliée membre à membre par U ; annexe 4) :

$$(2) \quad \frac{1}{V^3} \frac{d}{dx} (V^3 \delta^{***}) = 2\Phi$$

posant $\delta^{***} = \bar{H} \delta^{**}$ et tenant compte de (1), (2) s'écrit :

$$(3) \quad \frac{d\bar{H}}{dx} = \frac{2\Phi}{\delta^{**}} + \frac{\bar{H}(H-1)}{V} \frac{dV}{dx} - \frac{cf}{2} \frac{\bar{H}}{\delta^{**}}$$

Sachant que $\bar{H}$ est une fonction connue de H : $\bar{H} = \bar{H}(H)$ (planche 14), (3) devient :

$$(4) \quad \frac{dH}{dx} = \left(\frac{1}{d\bar{H}} \right) \left\{ \frac{2\Phi}{\delta^{**}} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} \left\{ \bar{H}(H-1) \right\} - \frac{\bar{H} \cdot cf}{\delta^{**} 2} \right\}$$

- c) Equation de couplage avec l'écoulement extérieur

$$(5) \quad \frac{d\delta^*}{dx} = \frac{d}{dx} (H\delta^{**}) = \tan \theta$$

L'inclinaison θ locale de la ligne de courant $\Psi = 0$ est fournie par la résolution du problème extérieur $\Delta\Psi = 0$, compte tenu des conditions aux limites données sur $\Psi = 0$

- soit $V(x)$

- soit des données mixtes $V(x)$ dans le domaine de recollement, $\theta(x)$ en amont et en aval.

La loi $V(x)$ étant supposée connue, le système d'équation (1) et (4) peut s'écrire :

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = A_1(x, \delta^{**}, H) \quad 6 (1)$$

$$\frac{dH}{dx} = A_2(x, \delta^{**}, H) \quad 6 (2)$$

avec

$$A_1 = \frac{cf}{2} - \frac{\delta^{**}(H+2)}{V} \cdot \frac{dV}{dx}$$

et

$$A_2 = 1/\frac{d\bar{H}}{dH} \left\{ \frac{2\Phi}{\delta^{**}} + \frac{\bar{H}(H-1)}{V} \cdot \frac{dV}{dx} - \frac{H}{\delta^{**}} \cdot \frac{cf}{2} \right\}$$

La résolution numérique de ce système permet de calculer de proche en proche l'évolution des caractéristiques globales de la couche limite H, δ^{**} de part et d'autre du point de recollement, sous certaines réserves que nous allons maintenant examiner.

IV-3.2.3 - Discussion du système d'équations (6); existence d'un point critique.

Le second membre de l'équation 6(2) fait intervenir au dénominateur la fonction $d\bar{H}/dH$ qui s'annule (planche 14) pour le couple de valeurs

$$\begin{cases} H_c = 3 \\ \bar{H}_c = 15 \end{cases}$$

Lorsque le système (6) est intégré dans le domaine de recollement, l'évolution $H(x)$ correspondante doit présenter une décroissance monotone lorsque x augmente à partir de l'extrémité du domaine isobare, depuis une valeur de H très supérieure à 3 jusqu'à une valeur très inférieure. Cette condition impose nécessairement, d'une part que la valeur $H_c = 3$ appartienne au domaine d'intégration, d'autre part et corrélativement que le numérateur de A_2 (équation 6(2)) s'annule en même temps que $d\bar{H}/dH$ lorsque H atteint la valeur H_c , pour assurer l'évolution $H(x)$ prévue. Le point d'abscisse x_c correspondant à $d\bar{H}/dH = 0$ est donc un point critique pour le système (6).

La condition: A_2 fini, lorsque $H = H_c$ s'écrit, en affectant l'indice c aux différentes grandeurs δ^{**}, Φ, V correspondant à H_c , et en négligeant le frottement, en ce point qui se trouve au voisinage immédiat du point de recollement et en aval ($H_R \approx 32$).

$$(7) \quad \frac{\delta_c^{**}}{V_c} \cdot \left(\frac{dV}{dx} \right)_c = \frac{2\Phi_c}{H_c(1-H_c)} = \text{constante} = k_c \neq -0,006$$

La relation (7) devant nécessairement être satisfaite au point critique constitue en quelque sorte un critère de recollement qui relie l'épaisseur de quantité de mouvement en C au gradient de vitesse en ce point.

D'autre part, reportant l'expression (7) dans l'équation de KARMAN, on obtient :

$$(8) \quad \left(\frac{d\delta^{**}}{dx} \right)_c = -(H_c + 2) K_c$$

Ainsi l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement δ^{**} est très strictement définie en C et directement liée au gradient de vitesse en ce point.

Il convient également de remarquer que l'intégration numérique du système (6) doit être nécessairement initiée en C. En effet compte tenu de la condition (7), la solution du système (6) ne peut être obtenue pour des conditions initiales arbitraires en amont, même si ces données initiales δ_o^{**}, H_o en $x_o < x_c$ sont extrêmement proches des valeurs exactes définies en $x = x_o$ par les courbes intégrales $\delta^{**}(x), H(x)$ passant par le point critique. Pour amorcer le calcul, outre la relation (8) il est nécessaire de connaître la valeur de $(dH/dx)_c$. L'indétermination existant nécessairement peut être levée en utilisant la règle de l'HOPITAL. On trouve tous calculs faits, que $(dH/dx)_c = m_c$ est racine de l'équation du 2ème degré.

$$(9) \quad m_c^2 \left(\frac{d^2 \bar{H}}{dH^2} \right)_c + m_c \left[\frac{\bar{H}(H-1)}{\phi_c} \cdot \left(\frac{d\phi}{dH} \right)_c \cdot \frac{1}{V_c} \cdot \left(\frac{dV}{dx} \right)_c - \frac{\bar{H}}{V_c} \cdot \left(\frac{dV}{dx} \right)_c \right] \\ + \bar{H}_c (H_c - 1)(H_c + 2) \left[\frac{1}{V_c} \left(\frac{dV}{dx} \right)_c \right]^2 - \bar{H}_c (H_c - 1) \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{V_c} \left(\frac{dV}{dx} \right)_c \right] = 0$$

Seule la racine négative est compatible avec l'évolution expérimentale de H au voisinage du point critique.

IV-3.2.4 - Application au calcul du domaine de recollement; comparaison avec l'expérience.-

La distribution $V(x)$ des vitesses dans le domaine de recollement étant supposée connue, ainsi que des conditions initiales concernant les couches dissipatives en un point $x = x_o$ situé à l'extrémité du domaine isobare, soit par exemple $\delta_o^{**}(x_o)$ et $H(x_o)$, le calcul couplé de $\delta^{**}(x)$ et $H(x)$ pour $x > x_o$ peut être effectué en intégrant le système (6). Toutefois, compte tenu de ce qui a été dit précédemment, cette solution sera nécessairement basée sur une méthode de tir qui consistera à rechercher la position du point critique, dans le domaine de recompression, compatible avec les conditions initiales δ_o^{**} et H_o données.

Le processus itératif proposé est alors le suivant :

- a) un point critique est arbitrairement imposé à l'abscisse $(x_c)_1$ du domaine de recompression;
- b) l'application de la relation (7) $V(x)$ étant connu, permet de calculer la valeur $(\delta_c^{**})_1$ correspondant à ce choix;
- c) la résolution du système différentiel (6) en amont de $(x_c)_1$ jusqu'en x_o conduit à une première distribution $\delta_1^{**}(x)$ et $H_1(x)$.

- d) si en $x=x_0$ les valeurs $\delta_1^{**}(x_0)$ et $H_1(x_0)$ sont différentes des valeurs initiales fixées, le calcul est recommencé pour une valeur $(x_c)_2 \neq (x_c)_1$ jusqu'à convergence du processus.

Cette procédure se heurte à quelques difficultés qui proviennent :

- des exigences relatives aux conditions de raccordement avec des valeurs initiales imposées en x_0 portant sur les deux grandeurs H_0 et δ_0^{**}
- de la validité des équations de la couche limite utilisées dans le domaine de recollement.

En ce qui concerne le premier point, les exemples de calcul présentés planches 40 à 42 permettent d'apprécier clairement les problèmes qui se posent.

Les évolutions $\delta^{**}(x)$ calculées pour différentes abscisses supposées x_c du point critique sont présentées planche 40 pour la configuration d'essai $\alpha = -0,9^\circ$, $h = 24$ mm.

La valeur initiale δ_0^{**} à $x_0 = 90$ mm a été fournie par l'expérience. On constate que lorsque x_c varie dans un étroit domaine compris entre $x = 160$ et $x = 170$ mm, les valeurs de δ_c^{**} correspondantes déduites de la relation (7) sont très nettement différentes $4\text{ mm} < \delta_c^{**} < 6\text{ mm}$. Par contre l'évolution $\delta^{**}(x)$ pour $x < x_c$ conduit à un resserrement du faisceau des courbes de calcul; celles-ci convergent toutes sensiblement au même point pour une valeur de x voisine de x_0 .

Une situation inverse apparaît lorsque l'on examine les courbes $H(x)$ obtenues dans les mêmes conditions (planche 41).

Cette situation est évidemment favorable pour définir avec précision la courbe satisfaisant aux conditions initiales H_0 en x_0 .

Les courbes $\delta^*(x) = H(x) \cdot \delta^{**}(x)$ n'ont pas été données; elles présentent une évolution tout à fait analogue à celle de $H(x)$ (planche 41).

Les difficultés rencontrées, dans la détermination du point critique sont résumées planche 42, où sont présentées, toujours pour la même configuration $\alpha = -0,9^\circ$, $h = 24$ mm, les valeurs de δ_0^{**} , H_0 , δ_0^{**} calculées à $x_0 = 90$ mm en fonction de x_c , abscisse supposée du point critique. Les valeurs expérimentales $(\delta_0^*)_E$, $(H_0)_E$, $(\delta_0^{**})_E$ sont également portées sur ce diagramme, ainsi que l'abscisse $(x_c)_E$ du point critique expérimental défini par la condition $H_c = 3$.

On remarquera, en premier lieu, qu'il n'y a pas concordance rigoureuse entre les différentes valeurs de x_c calculées de façon à satisfaire à des conditions initiales portant soit sur δ_0^{**} , soit sur H_0 , soit sur δ_0^* . Toutefois ces écarts $\Delta x_c \leq 3,5$ mm sont faibles devant l'étendue L de la zone décollée $\Delta x_c / L \leq 0,02$ et sont essentiellement imputables aux conditions de raccord portant sur δ_0^{**} qui, comme le montre la planche 40 ne permettent pas de définir x_c avec une grande précision. Par contre, les points critiques déterminés à partir de H_0 ou de δ_0^* sont extrêmement proches et correspondent à la valeur $(x_c)_E$ fournie par l'expérience.

D'un point de vue pratique, il a semblé préférable de satisfaire dans la recherche du point critique à une condition initiale unique portant sur la valeur $\delta_0^* = H_0 \cdot \delta_0^{**}$.

L'utilisation de la méthode de tir ainsi aménagée, conduit en général à un bon recoupement avec les expériences effectuées sur les configurations de base ainsi que le montant des planches 43 à 48, les évolutions $\delta(x)$ et $H(x)$ étant retrouvées de façon satisfaisante.

On notera (planche 44), comme confirmation de la remarque effectuée dans le § précédent que le calcul effectué sur le système (6) sans précautions et en négligeant l'existence du point critique, entraîne des écarts sensibles par rapport à l'expérience, et en particulier une évolution anormale du paramètre de forme en aval du point de recollement.

Le succès de cette technique de calcul semble donc confirmer à posteriori la validité des équations globales de la couche limite utilisées dans un domaine où cette validité peut être controversée.

IV-3.2.5 - Perspectives d'avenir.-

Les calculs effectués jusqu'à présent ont utilisé des lois de vitesses $V(x)$ déduites des distributions pariétales de pression fournies par l'expérience. Pour traiter complètement le problème du recollement il faut donc, - soit définir cette loi de vitesse à partir des conditions de couplage représentées par l'équation (5) du § IV-3.2.2,

- soit utiliser des données réduites quasi universelles d'une manière analogue à celle présentée § IV-2,

- soit enfin envisager un traitement mixte faisant intervenir ces 2 procédures.

Ce problème n'a pas été abordé dans le présent travail.

IV-4 - Conclusion sur les calculs théoriques.-

Parallèlement aux études expérimentales, des calculs théoriques ont été développés. La recherche d'une règle de couplage entre l'écoulement extérieur irrotationnel et l'écoulement dans le décollement supposé à rotationnel constant (modèle de BATCHELOR), ont été effectués. Les comparaisons avec l'expérience mettent en évidence le rôle prédominant joué par la viscosité dans la détermination de l'écoulement. C'est pourquoi d'autres méthodes de calcul du décollement ont été envisagées.

Tout d'abord des calculs basés sur le caractère quasi-universel de la répartition de pression dans le domaine de recollement et faisant intervenir certaines équations de la couche limite ont été effectués; ils donnent un bon accord avec l'expérience. Ce modèle de calcul a été étendu au cas plus général du traitement des couches dissipatives dans le domaine du recollement utilisant les équations globales complètes de la couche limite.

Les calculs numériques des parties III et IV ont été réalisés sur l'ordinateur 360/50 du Centre de Calculs de l'ONERA.

V - CONCLUSION.

L'écoulement dans un canal de hauteur donnée, présentant une paroi inférieure de forme d'une marche descendante et comportant un point de décollement fixé a été étudié. L'expérience a permis de mettre en évidence des propriétés générales concernant les répartitions de pression longitudinale et des autres paramètres caractéristiques de la couche limite de l'écoulement. Ces propriétés servent de base à différentes méthodes de calculs théoriques dans le but de trouver un modèle de calculs simple de l'écoulement. L'étude du modèle de BATCHELOR, dans lequel le sillage est assimilé à une zone à rotationnel constant a été effectuée et a conduit à une solution numérique à un paramètre. La complexité de l'écoulement décollé nécessite en fait des calculs plus réalistes faisant appel à l'empirisme. La méthode de calculs à partir des propriétés quasi-universelles de courbes de répartition de pression $\bar{W}(x/x_R)$ et de saut de pression, au point de recollement $(Kp)_R(Cq)$ donne des résultats satisfaisants mais n'est valable que pour une configuration particulière de l'écoulement. Le modèle de calculs plus général du sillage, à partir des données empiriques universelles de paramètres de forme $H, \bar{H}$ et de fonction de dissipation Φ , conduit à des résultats très encourageants; dans l'état actuel des choses, il reste à traiter le problème du couplage avec l'écoulement extérieur.

ANNEXE 1

1 - CALCUL DE L'ÉCOULEMENT IRROTATIONNEL DU DOMAINE EXTERIEUR NON VISQUEUX DANS LE CAS D'UNE MARCHE DESCENDANTE COMPORTANT DES PAROIS AMONT ET AVAL PARALLELES ($\Theta = 0$)

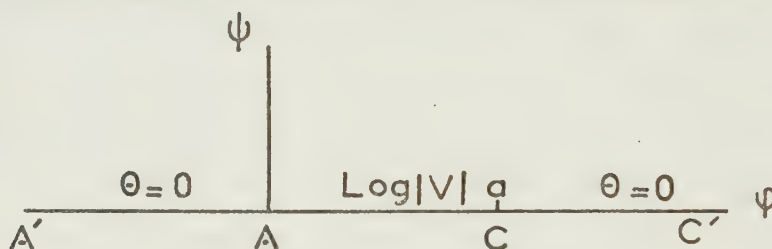
1.1 - Soit $f = \varphi + i\psi$ le potentiel complexe de l'écoulement. Dans le plan φ, ψ (voir figure) cet écoulement est représenté par le $\frac{1}{2}$ plan $\psi \geq 0$, limité par $A'ACC$; A et C sont respectivement les images des points de décollement et de recollement, A' et C' les images des points à l'infini amont et aval sur $\psi = 0$.

Les conditions aux limites le long de $A'ACC'$ sont les suivantes:

$$\Theta = 0 \quad \text{sur } A'A \text{ et } CC';$$

$$(V) = (V)(\varphi) \quad \text{sur } AC$$

Le problème posé revient à déterminer la fonction analytique de $f, -\text{Log}|V| + i\Theta$, connaissant $\text{Log}(V)$ sur AC et Θ sur $A'ACC'$. C'est un problème de VOLTERRA.



Le calcul numérique de l'écoulement a été effectué à l'aide de 2 formulations différentes.

1.2 - Formulation de SIGNORINI (réf. 22 p. 111)

Considérons la fonction $P_1(\varphi) = \sqrt{\varphi(\varphi - a)}$, a étant l'abscisse de C , pour laquelle on adopte la détermination du radical qui est positive pour φ réel et plus grand que a .

Cette fonction est holomorphe dans le plan φ, ψ muni d'une coupure sur le segment AC , sauf au point à l'infini qui est un pôle d'ordre 1.

$$\text{Soit } \Phi(\varphi) \text{ la fonction } \Phi = \frac{-\text{Log}|V| + i\Theta}{P_1} = \alpha + i\beta$$

Cette fonction est analytique dans le demi plan muni de sa coupure. Lorsque l'on parcourt l'axe réel ($\psi = 0$) les variations de P_1 et β sont les suivantes :

φ	$-\infty$	0	a	$+\infty$	
P_1	$-\sqrt{\varphi(\varphi-a)}$	0	$i\sqrt{ \varphi(\varphi-a) }$	0	$\sqrt{\varphi(\varphi-a)}$
β	0	$\frac{\text{Log} V }{P_1}$	0	0	

β partie imaginaire de ϕ est donc connu sur l'axe réel et par suite ϕ est déterminé dans tout le demi plan $\psi > 0$.

La solution générale est donnée par la relation :

$$\phi(f) = - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta(\psi) d\psi}{f-\psi}$$

qui s'écrit dans le cas particulier considéré :

$$(1) \quad \phi(f) = + \frac{i}{\pi} \int_0^a \frac{\text{Log}|V(\psi)|}{\sqrt{\psi(a-\psi)}} \cdot \frac{d\psi}{f-\psi}$$

L'inclinaison Θ du vecteur vitesse le long de AC s'en déduit immédiatement par :

$$(2) \quad \Theta(\psi) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\psi(a-\psi)} \int_0^a \frac{\text{Log}|V(\psi_0)|}{\sqrt{\psi_0(a-\psi_0)}} \cdot \frac{d\psi_0}{\psi_0-\psi}$$

La singularité qui apparaît lorsque $\psi_0 = \psi$, peut être dégagée, en écrivant (2) sous la forme :

$$(2') \quad \Theta(\psi) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\psi(a-\psi)} \int_0^a \frac{\text{Log}|V(\psi_0)| - \text{Log}|V(\psi)|}{\psi_0 - \psi} \cdot \frac{d\psi_0}{\sqrt{\psi_0(a-\psi_0)}}$$

équivalente à (2) puisque l'intégrale $\int_0^a \frac{d\psi_0}{(\psi_0-\psi)\sqrt{\psi_0(a-\psi_0)}}$ est nulle.

La quantité sous le signe somme de (2') prend alors en $\psi_0 = \psi$

la valeur $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\psi_0(a-\psi_0)}} \frac{\partial}{\partial \psi_0} [\text{Log}|V(\psi_0)|] \right\}_{\psi_0=\psi}$ qui est finie.

L'intégration numérique de $\Theta(\psi)$ présente quelques difficultés aux bornes $\psi_0 = 0$ et $\psi_0 = a$. Pour les surmonter, on écrit, en posant :

$$J(\psi) = \int_0^a \frac{\text{Log}|V(\psi_0)| - \text{Log}|V(\psi)|}{\psi_0 - \psi} \cdot \frac{d\psi_0}{\sqrt{\psi_0(a-\psi_0)}} = \int_0^a C_0(\psi_0, \psi) d\psi_0$$

$$J(\psi) = \int_0^\epsilon C_0(\psi_0, \psi) d\psi_0 + \int_\epsilon^{a-\epsilon} C_0(\psi_0, \psi) d\psi_0 + \int_{a-\epsilon}^a C_0(\psi_0, \psi) d\psi_0$$

Le calcul de l'intégrale $I_1 = \int_0^\epsilon C_0(\psi_0, \psi) d\psi_0$ est effectué en utilisant le changement de variable $\psi_0 = a \sin^2 t$; les bornes d'intégration deviennent alors 0 et $\epsilon_1 = \text{Arc sin } \sqrt{\epsilon/a}$ et la valeur de l'intégrale $I_1 = \int_0^{\epsilon_1} \bar{C}_0(\psi_0, \psi) d\psi_0 = \int_0^{\epsilon_1} \bar{C}_0(t, \psi) dt$ peut être approchée par l'expression :

$$I_1 = \frac{\epsilon_1}{2} (\bar{C}_0(0, \psi) + \bar{C}_0(\epsilon_1, \psi))$$

Le même changement de variable est utilisé pour le calcul de $I_2 = \int_{a-\epsilon}^a C_0(\psi_0, \psi) d\psi_0 = \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon_1}^{\frac{\pi}{2}} \bar{C}_0(t, \psi) dt$, avec la valeur approchée :

$$I_2 = \frac{\epsilon_1}{2} \left[\bar{C}_0\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) + \bar{C}_0\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon_1, \psi\right) \right]$$

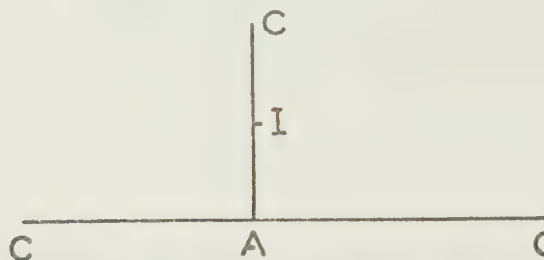
Remarque : Dans le cas où l'on permute les données sur $\left(\begin{array}{l} \psi \\ \Theta \end{array} \right)$ donné sur AC , le calcul de $\text{Log} \frac{V}{V_\infty}$ sur AC s'effectue suivant la même procédure et l'on obtient :

$$\text{Log} \frac{V}{V_\infty} = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\Theta(\psi_0)}{\psi_0 - \psi} d\psi_0$$

1.3 - Méthode de R. LEGENDRE (réf. 21) :

Pour séparer les régions où la condition aux limites porte sur V de celles où la condition aux limites portent sur Θ , on fait la transformation

$$\frac{\varphi - (\varphi_C + \varphi_A)/2}{(\varphi_C - \varphi_A)/2} = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}$$



La frontière AC correspond à ξ réel variant de 0 à $+\infty$ ou de 0 à $-\infty$; l'amont de la marche correspond à AI et l'aval à IC. Plutôt que de se donner $V = V(\xi)$ pour $\xi > 0$ et $\Theta = 0$ sur l'axe imaginaire, il suffit de se donner $V(\xi)$ paire sur tout l'axe réel, car la donnée étant symétrique, la condition $\Theta = 0$ sera automatiquement satisfaite sur l'axe imaginaire.

Le problème à résoudre est alors celui du calcul d'une fonction analytique dont la partie réelle est connue sur l'axe réel.

La solution classique est :

$$\begin{aligned} \text{Log} \frac{V(\xi)}{V(A)} - i \Theta(\xi) &= \frac{i}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi_0} (\text{Log} V(\xi_0)) \cdot \text{Log}(\xi_0 - \xi) d\xi_0 \\ &= \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\xi_0} (\text{Log} V(\xi_0)) \cdot \text{Log} \frac{\xi_0 - \xi}{\xi_0 + \xi} d\xi_0 \end{aligned}$$

Cette formule a l'inconvénient d'introduire la dérivée logarithmique de $V(\xi)$, une intégration par partie élimine cette difficulté.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\xi_0} (\text{Log} V(\xi_0)) \text{Log} \frac{\xi_0 - \xi}{\xi_0 + \xi} d\xi_0 &= \int_0^{\infty} \text{Log} \frac{V(\xi_0)}{V(A)} \frac{-2\xi}{\xi_0^2 - \xi^2} d\xi_0 \\ \Theta(\xi) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Log} \frac{V(\xi_0)}{V(A)} \frac{2\xi}{\xi_0^2 - \xi^2} d\xi_0 \end{aligned}$$

La singularité existant pour $\xi_0 = \xi$ peut être dégagée en écrivant :

$$\Theta(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Log} \frac{V(\xi_0)}{V(\xi)} \frac{2\xi}{\xi_0^2 - \xi^2} d\xi_0 - \frac{1}{\pi} \text{Log} \frac{V(\xi)}{V(A)} \int_0^{\infty} \frac{2\xi}{\xi_0^2 - \xi^2} d\xi_0$$

$\frac{2\xi}{\xi_0^2 - \xi^2} d\xi_0$ étant la différentielle de $\text{Log} \left| \frac{\xi_0 - \xi}{\xi_0 + \xi} \right|$ qui est nulle pour $\xi_0 = 0$ et $\xi_0 = \infty$ et par suite :

$$\Theta(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Log} \frac{V(\xi_0)}{V(\xi)} \frac{2\xi}{\xi_0^2 - \xi^2} d\xi_0$$

intégrale qui n'est plus singulière car $\text{Log} \frac{V(\xi_0)}{V(\xi)}$ s'annule en même temps que $\xi_0^2 - \xi^2$ et la dérivée $\frac{\partial}{\partial \xi_0} (\text{Log } V(\xi_0))$ est finie quand $\xi_0 = \xi$.

L'intégration numérique a été programmée en utilisant la méthode des trapèzes avec la fonction :

$$P(\xi) = \text{Log} \frac{V(\xi_0)}{V(\xi)} - \frac{2\xi}{\xi_0^2 - \xi^2}$$

Au point $\xi_0 = \xi$, $P(\xi)$ prend la forme :

$$P(\xi_0) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_0} (\text{Log } V(\xi_0)) \right)_{\xi_0 = \xi}$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} \text{Log } V(\xi_0) = \frac{\psi_c - \psi_A}{2} \frac{4\xi_0}{(\xi_0^2 + 1)^2} \left(\frac{\partial}{\partial \psi_0} \text{Log } V(\psi_0) \right)_{\psi_0 = \psi}$$

l'intégration numérique est faite jusqu'à une abscisse x suffisamment grande pour que dans l'expression :

$$\int_0^{\infty} P(\xi_0, \xi) d\xi_0 = \int_0^x P(\xi_0, \xi) d\xi_0 + \int_x^{\infty} P(\xi_0, \xi) d\xi_0$$

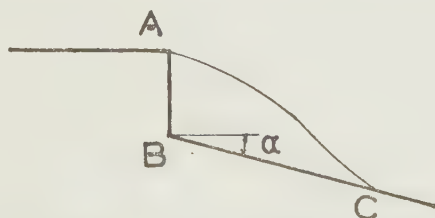
l'erreur due au terme négligé :

$$\left| \int_x^{\infty} P(\xi_0, \xi) d\xi_0 \right| < \left| \text{Log} \frac{V(x)}{V(\xi)} \text{Log} \frac{x+\xi}{x-\xi} \right|$$

soit inférieure à une valeur imposée à l'avance.

2 - GENERALISATION.--

Ecoulement avec plancher incliné (voir figure ci-après).--



Le plancher de recollement est incliné d'un angle α avec l'horizontale, la fonction $\psi(f)$ a donc sa partie imaginaire non nulle dans le segment $(a, +\infty)$ et l'on a le tableau de variations suivant :

$f = \psi$	$-\infty$	0	a	$+\infty$
$P_1(\psi)$	$-\sqrt{\psi(\psi-a)}$	0	$\sqrt{P(\psi)}$	0
$\beta(\psi)$	0	$\frac{\text{Log } V(\psi)}{\sqrt{P(\psi)}}$	$\frac{\alpha}{\sqrt{P(\psi)}}$	

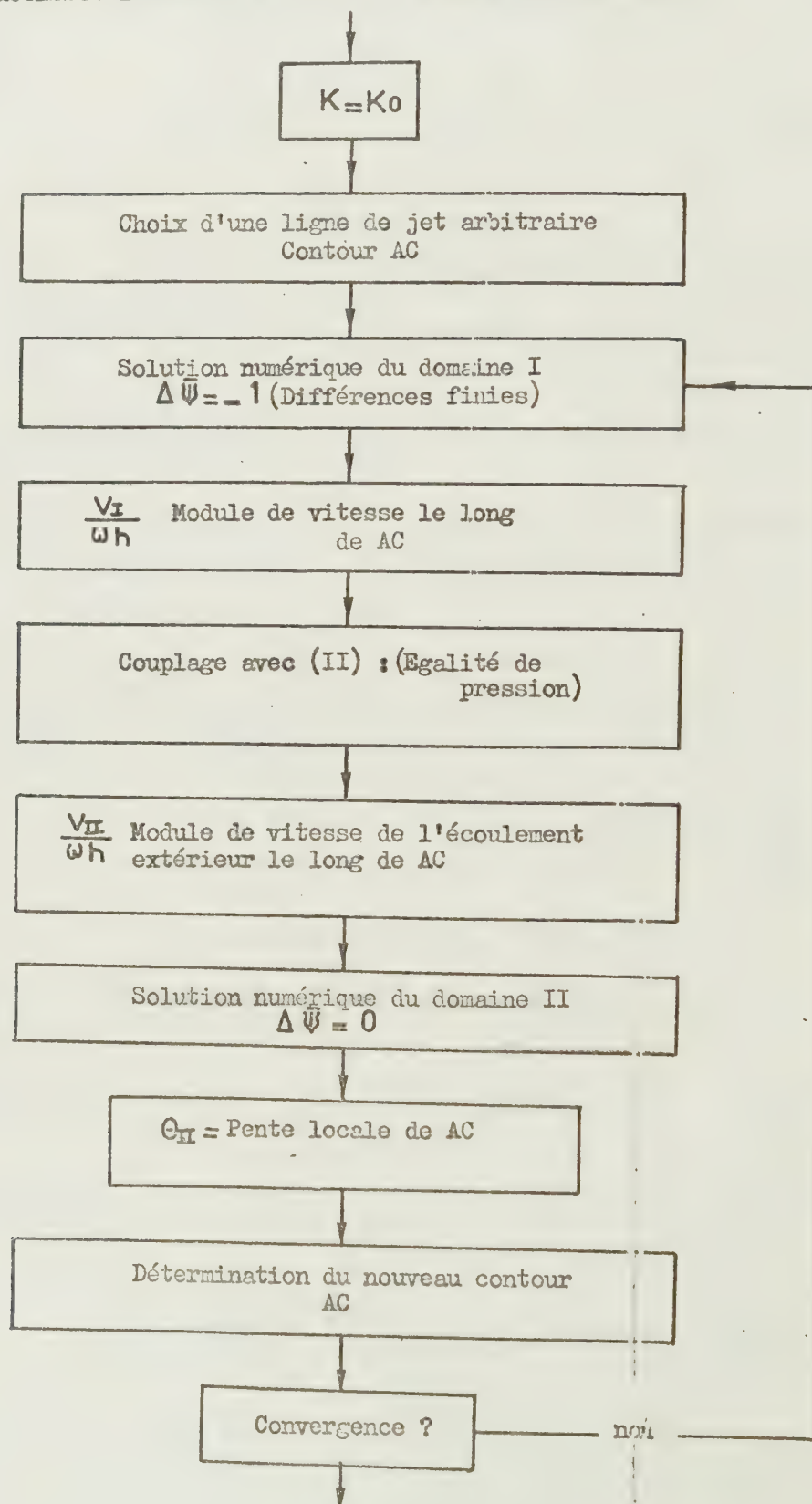
Dans ce cas, l'angle $\theta(\psi)$ est défini par la relation :

$$\theta(\psi) = \frac{1}{\pi} \sqrt{|\psi(a-\psi)|} \left[\int_0^a \frac{\text{Log } V(\psi_0)}{\sqrt{|\psi_0(a-\psi_0)|}} \frac{d\psi_0}{\psi_0 - \psi} + \alpha \int_a^{\infty} \frac{d\psi_0}{\sqrt{P(\psi_0)(\psi_0 - \psi)}} \right]$$

$$\theta(\psi) = \frac{1}{\pi} \sqrt{|\psi(a-\psi)|} \left[\int_0^x \frac{\text{Log } V(\psi_0)}{\sqrt{|\psi_0(a-\psi_0)|}} \frac{d\psi_0}{\psi_0 - \psi} + \frac{2\alpha}{\sqrt{|\psi(\psi-a)|}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc tg} \frac{\psi-a}{\sqrt{\psi(\psi-a)}} \right) \right]$$

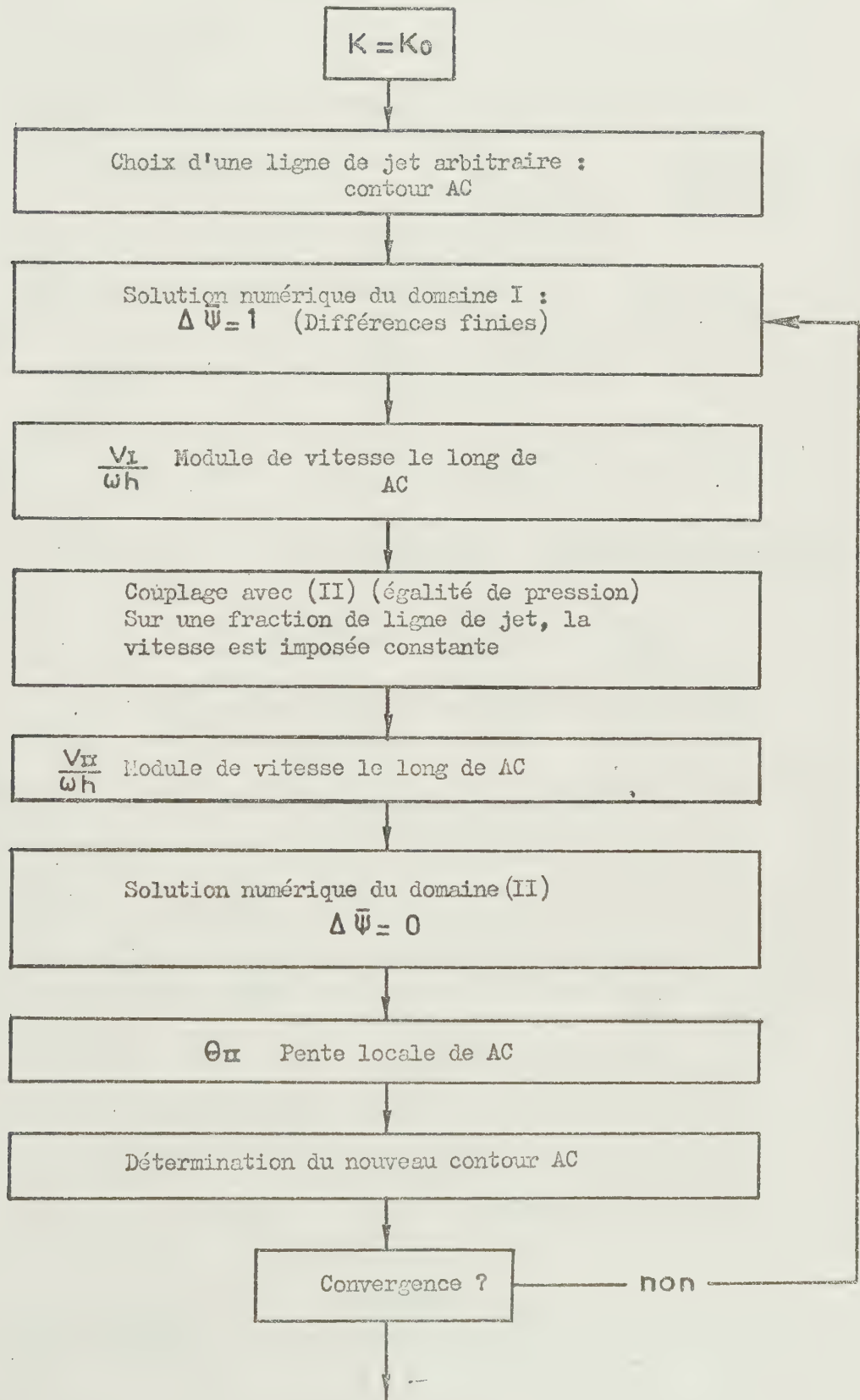
ANNEXE 2

PROCESSUS ITERATIF DE CALCUL DU MODELE DE BATCHELOR



ANNEXE 2a

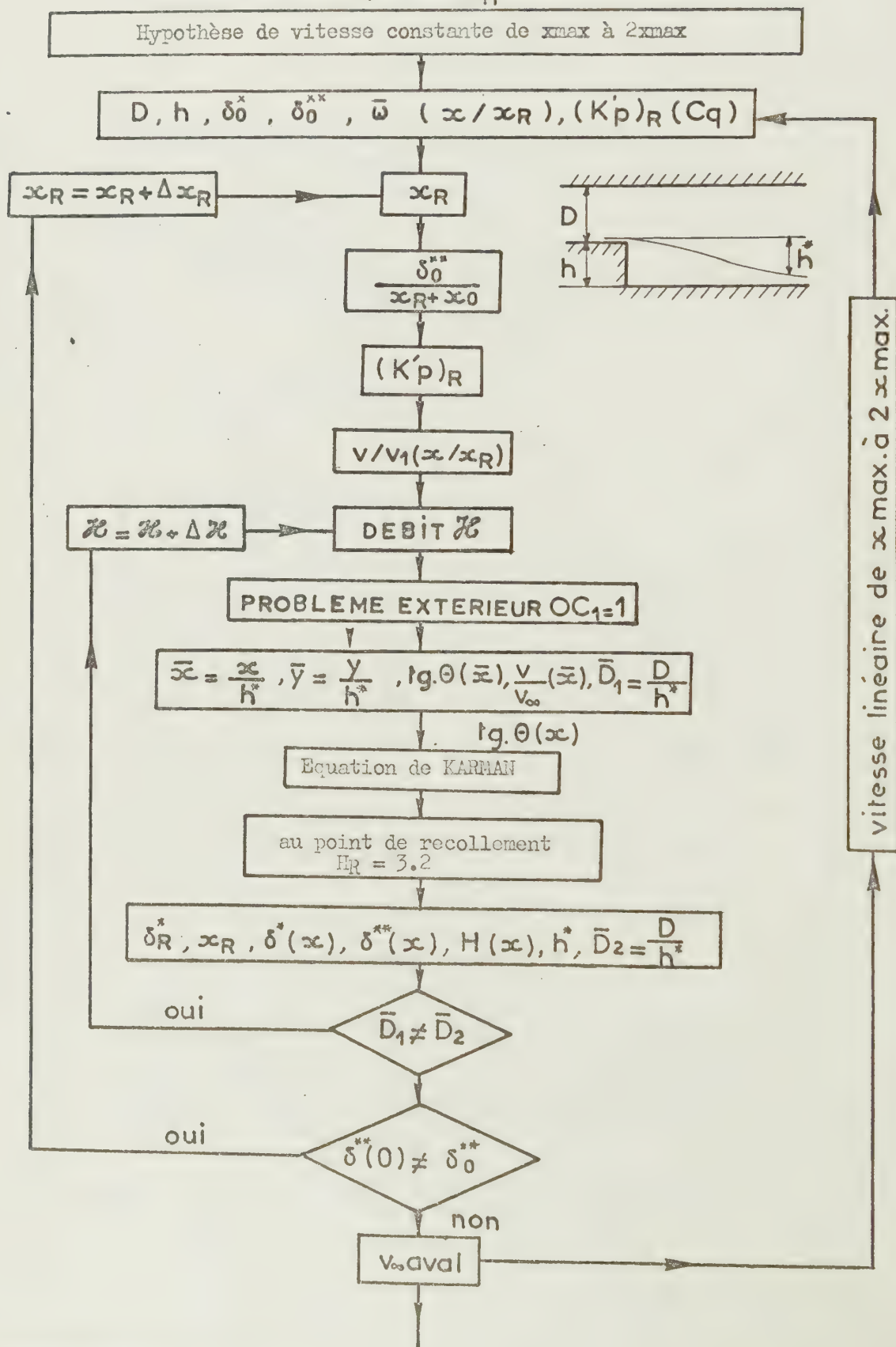
PROCESSUS ITERATIF de CALCUL du Modèle de BATCHELOR



Annexe 3

Calculs de l'écoulement avec les données empiriques de

$$\bar{\omega} \left(\frac{x}{x_R} \right) \text{ et } \frac{P_R - P_1}{Q_1}(Cq)$$



ANNEXE 4

EQUATION DE L'ENERGIE CINETIQUE1 - Rappel des définitions.-

Fonction de dissipation ϕ : $\phi = - \frac{1}{u_e^3} \int_0^\delta \frac{u}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dy$

Epaisseur d'énergie cinétique δ^{**} : $\delta^{**} = \frac{1}{u_e^3} \int_0^\delta u (u_e^2 - u^2) dy$

2 - Détermination de l'équation de l'énergie cinétique.-

L'équation des quantités de mouvement projetée suivant $\vec{x}$ s'écrit :

$$(1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

Si l'on intègre de 0 à δ , après avoir multiplié les 2 membres de (1) par u , on obtient, compte tenu de l'équation de continuité $v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy$

$$(2) \quad \int_0^\delta u^2 \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^\delta \left[u \frac{\partial u}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \right] dy = - \int_0^\delta \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{u}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

On peut écrire :

$$(3) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial (p - p_e)}{\partial x} + \frac{dp_e}{dx} = \frac{\partial (p - p_e)}{\partial x} - \rho u_e \frac{du_e}{dx}$$

L'intégration du second terme du premier membre de (1) par parties donne :

$$\int_0^\delta \left[u \frac{\partial u}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^\delta (u_e^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Reportant dans (2) et compte tenu de (3) il vient :

$$(4) \quad \int_0^\delta \left[u^2 \frac{\partial u}{\partial x} - u u^2 \frac{du_e}{dx} \right] dy - \frac{1}{2} \int_0^\delta (u_e^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^\delta - \frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p - p_e) dy + \int_0^\delta \frac{u}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

soit encore

$$(4') \quad \frac{1}{2} \int_0^\delta u \frac{\partial}{\partial x} [u^2 - u_e^2] dy + \frac{1}{2} \int_0^\delta (u^2 - u_e^2) \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^\delta - \frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p - p_e) dy -$$

qui s'écrit :

$$\phi u_e^3$$

(4'')

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta u (u_e^2 - u^2) dy \right] = + \int_0^\delta \frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p - p_e) dy + \phi u_e^3$$

Soit encore :

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[u_c^3 \delta^{xxx} \right] = 2 u_c^3 \phi + 2 \int_0^\delta \frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p - p_c) dy$$

Si la variation $p(y)$ peut être négligée entre 0 et δ , on obtient alors la relation usuelle, appelée équation intégrale de l'énergie cinétique :

$$(6) \quad \frac{d}{dx} \left[u_c^3 \delta^{xxx} \right] = 2 u_c^3 \phi.$$

ANNEXE 5

On peut remarquer (pl. 10) qu'au point de recollement R , la pente de la courbe $\bar{\omega} (x/x_R)$ est constante en moyenne, quelle que soit la configuration de l'écoulement étudiée.

Par suite

$$\frac{d}{d(x/x_R)} \left[\frac{P - P_1}{P_R - P_1} \right] = \text{constante} \quad (1)$$

La valeur de cette constante étant égale à $K_1 = 1,66$ environ.

Nous avons défini : $(K'_p)_R = \frac{P_R - P_1}{q_1}$ et $Cq = \frac{\delta_0^{**}}{x_R - x_0}$, on se propose de retrouver la loi quasi-universelle $(K'_p)_R = f(Cq)$ donnée par l'expérience et présentée sur la planche 9.

La relation (1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(x/x_R)} \left[\frac{P - P_1}{P_R - P_1} \right]_R &= \left[\frac{d}{d(x/x_R)} \left(\frac{1 - (V/V_1)^2}{1 - (V_R/V_1)^2} \right) \right]_R \\ &= - \frac{2}{1 - (V_R/V_1)^2} \cdot \frac{V_R}{V_1} \left[\frac{d(V/V_1)}{d(x/x_R)} \right]_R \end{aligned}$$

d'où :

$$\left(\frac{d(V/V_1)}{d(x/x_R)} \right)_R = - \frac{K_1}{2} \frac{1 - (V_R/V_1)^2}{V_R/V_1} \quad (2)$$

On peut confondre le point de recollement avec le point critique, compte tenu de leur proximité et par suite $H_R = 3,2$ $H_R = 1,5$, sachant que $\delta^{**} V_R (dV_R/dx)_R = \text{constante} = K_c$, on a donc :

$$\begin{aligned} \text{soit : } \frac{\delta_R^{**}}{2 x_R} \times \frac{1 - (V_R/V_1)^2}{(V_R/V_1)^2} &= - \frac{K_c}{K_1} \\ - \frac{2 K_c}{K_1} &= \frac{\delta_R^{**}}{x_R} \frac{(K'_p)_R}{1 - (K'_p)_R} \end{aligned} \quad (3)$$

Dans la zone décollée, l'équation de KARMAN :

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = - \frac{(H+2)\delta^{**}}{V_c} \frac{dV_c}{dx} \quad \text{montre, moyennant l'hypothèse d'un frottement}$$

pariétal négligeable et d'un gradient de pression normal, sensiblement nul dans la couche limite, que δ^{**} est constante dans la zone isobare; d'autre part,

$$\text{au point critique } \left(\frac{d\delta^{**}}{dx} \right)_R = - (H_c + 2) K_c = K'.$$

L'évolution $\delta^{xx}(x)$ peut alors être schématisée par la représentation donnée fig. 1, inspirée de l'expérience.

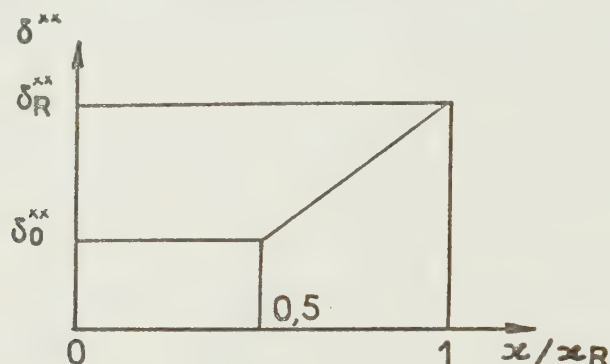


Fig. 1

Dans ces conditions :

$$\frac{\delta/x_R - \delta_0/x_R}{x/x_R - 0,5} = K'$$

et par suite en $x = x_R$:

$$\frac{\delta_R^{xx}}{x_R} = 0,5 K' + \frac{\delta_0^{xx}}{x_R} \quad (4)$$

Introduisant le paramètre $Cq = \frac{\delta_0^{xx}}{x_R + x_0} = \frac{\delta_0^{xx}}{x_R + 81 \delta_0^{xx}}$

on peut éliminer $\frac{\delta_0^{xx}}{x_R}$ dans l'équation (4).

On obtient alors la relation

$$\frac{\delta_R^{xx}}{x_R} = 0,5 K' + \frac{Cq}{1 - 81 Cq} \quad (5)$$

valable tant que Cq est petit $Cq < 0,01$.

Reportant cette expression (5) dans (3) il vient :

$$-2 \frac{K_c}{K_1} = \frac{(K'p)_R}{1 - (K'p)_R} \left[0,5 K' + \frac{Cq}{1 - 81 Cq} \right]$$

soit

$$(K'p)_R = \frac{-2 K_c / K_1}{0,5 K' - 2 K_c / K_1 + Cq / 1 - 81 Cq} \quad (6)$$

(6) permet de calculer la relation existant entre $(K'p)_R$ et Cq

La comparaison avec l'expérience effectuée pl. 49 est assez satisfaisante.

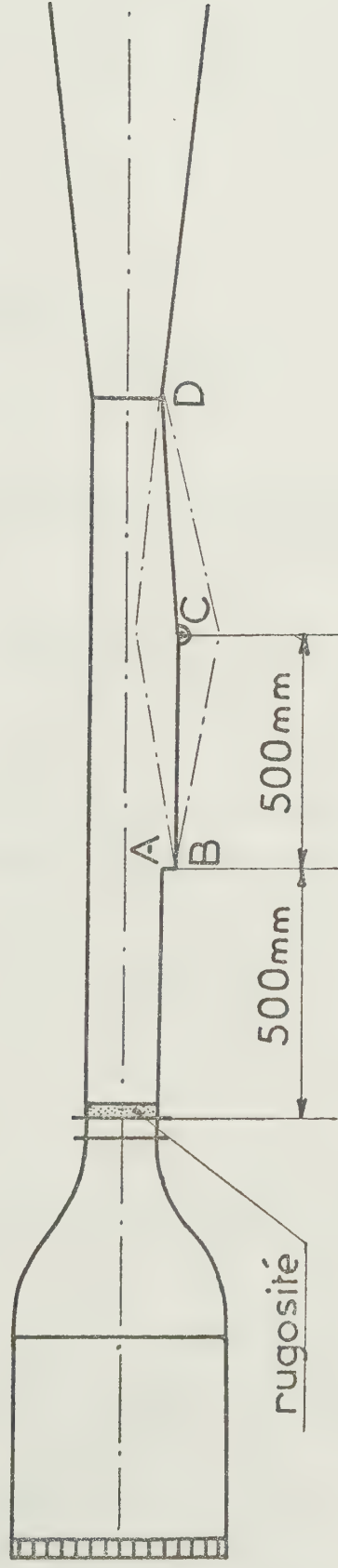
REFERENCES

- 1 P. CARRIERE et M. SIRIEIX -- Facteurs d'influence du recollement d'un écoulement supersonique.
X^e Congrès International de Mécanique Appliquée (1960).
- 2 J.F. NASH -- An analysis of two dimensional base flow including the effect of the approaching boundary-layer.
N.P. 4 Aero Report 1036 (1962).
- 3 H. MAC DONALD -- A study of the turbulent separated flow region occurring at a compression corner in supersonic flow.
Journal of fluid Mechanic vol. 22 (1965).
- 4 R.K. TAGUIROV -- Influence of the initial boundary layer on base pressure.
Traduction Faraday Press (1966).
- 5 R.K. TAGUIROV -- Etude expérimentale des zones de décollement turbulent supersonique.
Réunion Franco-Soviétique -- Juin 1968.
- 6 M. SIRIEIX, J. DELERY, J. MIRANDE -- Recherches expérimentales sur les écoulements séparés et applications.
8^{ème} Symposium Elonais de Dynamique des Fluides TANDA 1967.
- 7 GLOTOV et MOROZ -- Etude expérimentale du recollement d'un écoulement supersonique turbulent.
Réunion Franco-Soviétique 1969.
- 8 R. PAGE, W. HILL et T. KESSLER -- Reattachment of two dimensional supersonic turbulent flow.
ASME paper 67 (1968).
- 9 A. SEGIMER et J. ROM -- On the application of integral methode in separated flows.
T.A.E Report N° 77 (1967).
- 10 A. ROSHKO -- A review of concepts in separated flow.
Canadian Congress of Applied stechamics (1967).
- 11 I.E. ALBER et L. LEES -- Integral theory for supersonic turbulent base flows.
6^{ème} Aerospace Sciences AIAA Congres paper N° 68-101 (1968).

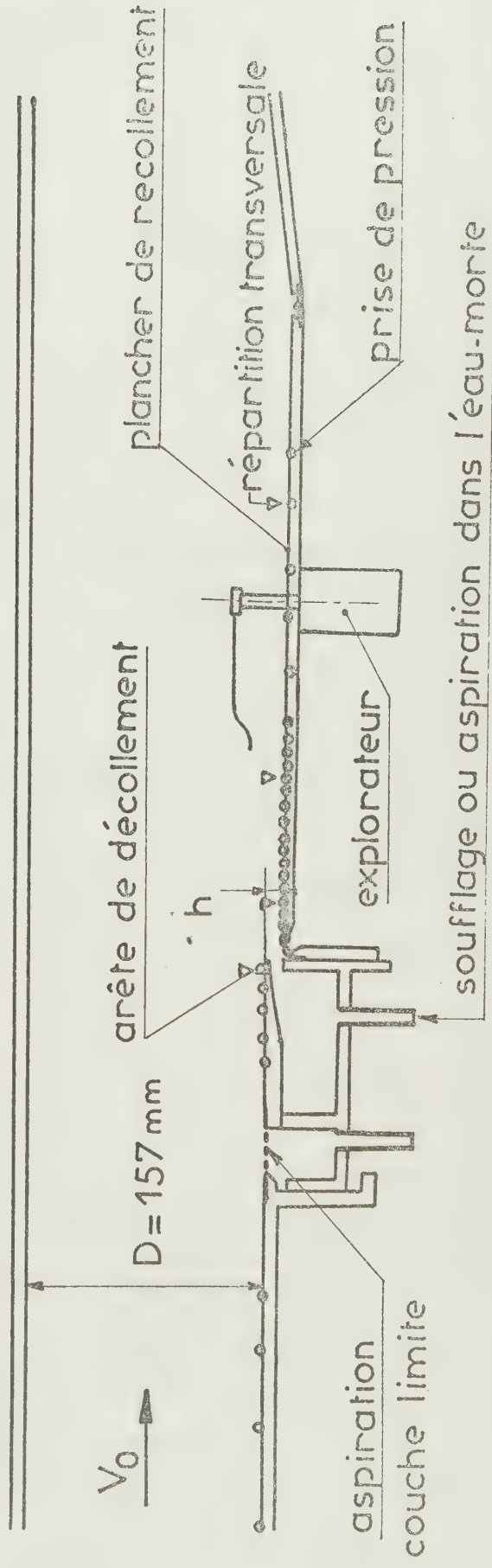
- 12 J.E. GREEN - Two dimensional turbulent reattachment as a boundary layer problem.
AGARD Conférence on separated flows (1966).
- 13 A. ROSKO et J.C. LAU - Some observations of transition and reattachment a free shear layer in incompressible flow.
Proceeding of the 1965 - Heat transfer and Fluid Mechanics Institute.
- 14 G.N. ABRANOVICH - The theory of turbulent jets.
The M.I.T. press.
- 15 T.J. MUELLER, H.H. KORST - On the separation reattachment an redevelopment of incompressible turbulent shear flow.
A.S.M.E. paper (1963).
- 16 - Institut de Mécanique des Fluides de TOULOUSE.
Rapport intérieur non publié.
- 17 M. SIRIEIX, J. MIRANDE et- Recherches effectuées à l'ONERA sur le recollement plan subsonique d'un écoulement turbulent à sa frontière.
NGUYEN VAN NOI
Réunion Franco-Soviétique - Nov. 1970.
- 18 G.K. BATCHELOR - On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number.
Journal of fluid mechanics - vol. 1 Part. 1 1956.
- 19 G.K. BATCHELOR - A proposal laminar wakes behind bluff bodils at large Reynolds number.
Journal of luid Mechanics - Vol. 1 Part. 4 1956.
- 20 BURGGRAF O.R. - "A model of steady separated flow in rectangular cavities at high Reynolds number".
Proceeding of the 1965 heat transfer and fluid mechanic institute (Stanford University Press Stanford California 1965) - pp. 190-229.
- 21 R. LEGENDRE - N.T. 102 - 301/DT 1967 ONERA
N.T. 102 - 304/DT 1967 ONERA
- 22 CAIUS JACOB - Introduction mathématique à la mécanique des Fluides.
- 23 L.G. LEAL, A. ACRIVOS - The effect of base bleed on the steady separated flow past bluff bodies.
Journal of fluid mechanics - vol. 39 Part. 4 1969 - pp. 735-752.



PL.1_ ENSEMBLE DE LA SOUFFLERIE

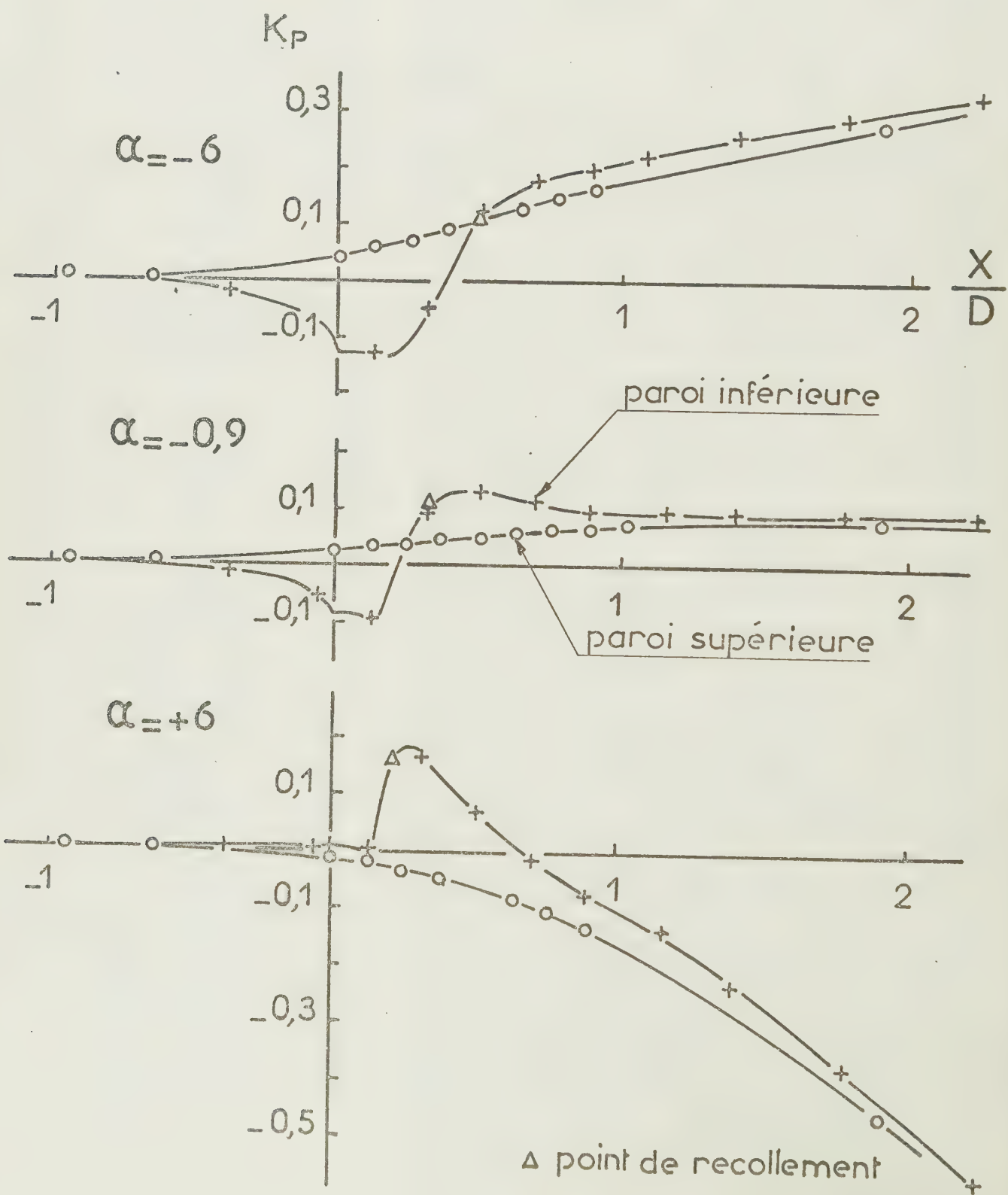


VEINE D'EXPERIENCE



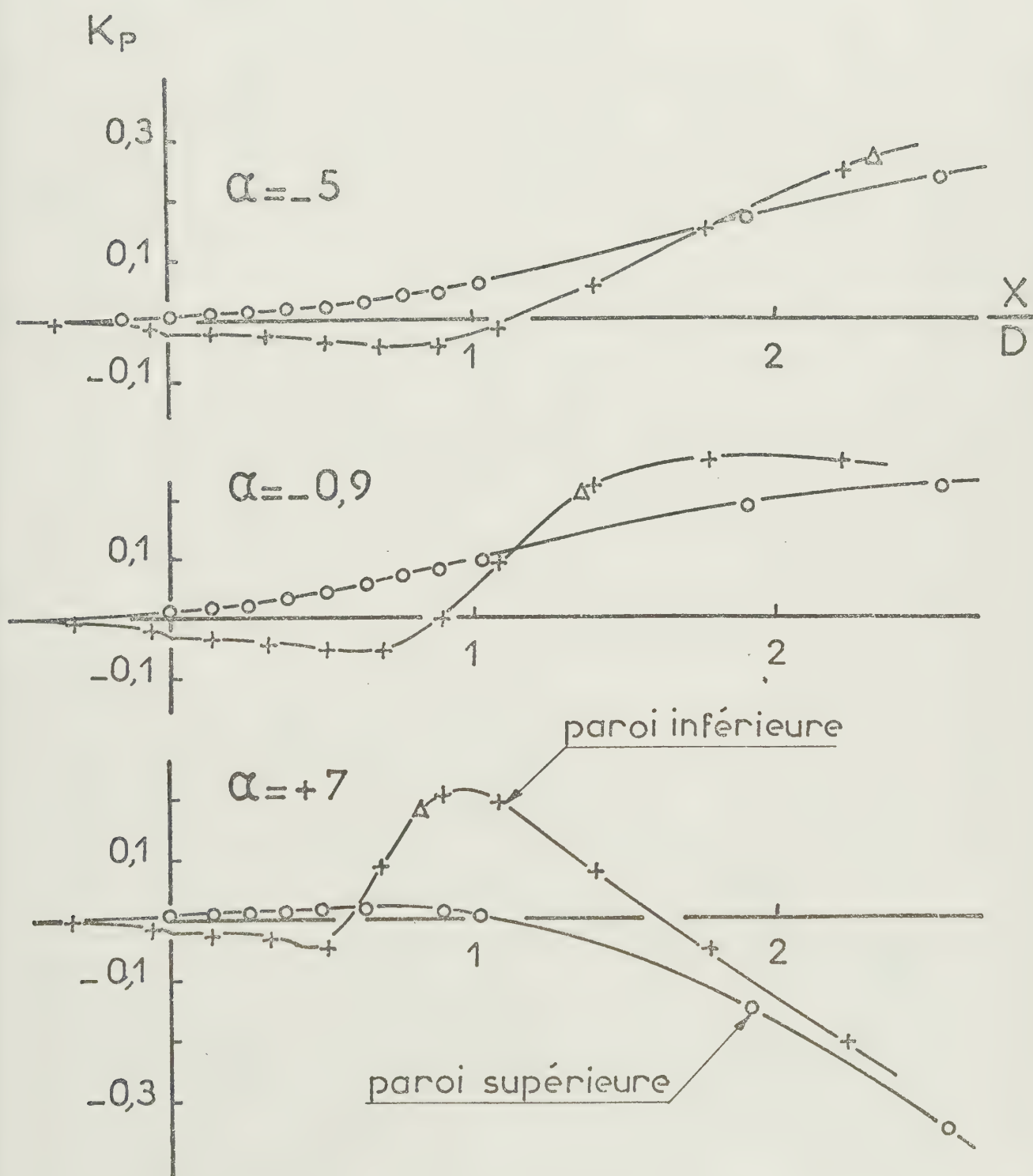
PL.2 _ REPARTITION DE PRESSION

$\frac{h}{D}=0,051$



PL. 3 _ REPARTITION DE PRESSION

$$\frac{h}{D}=0,201$$



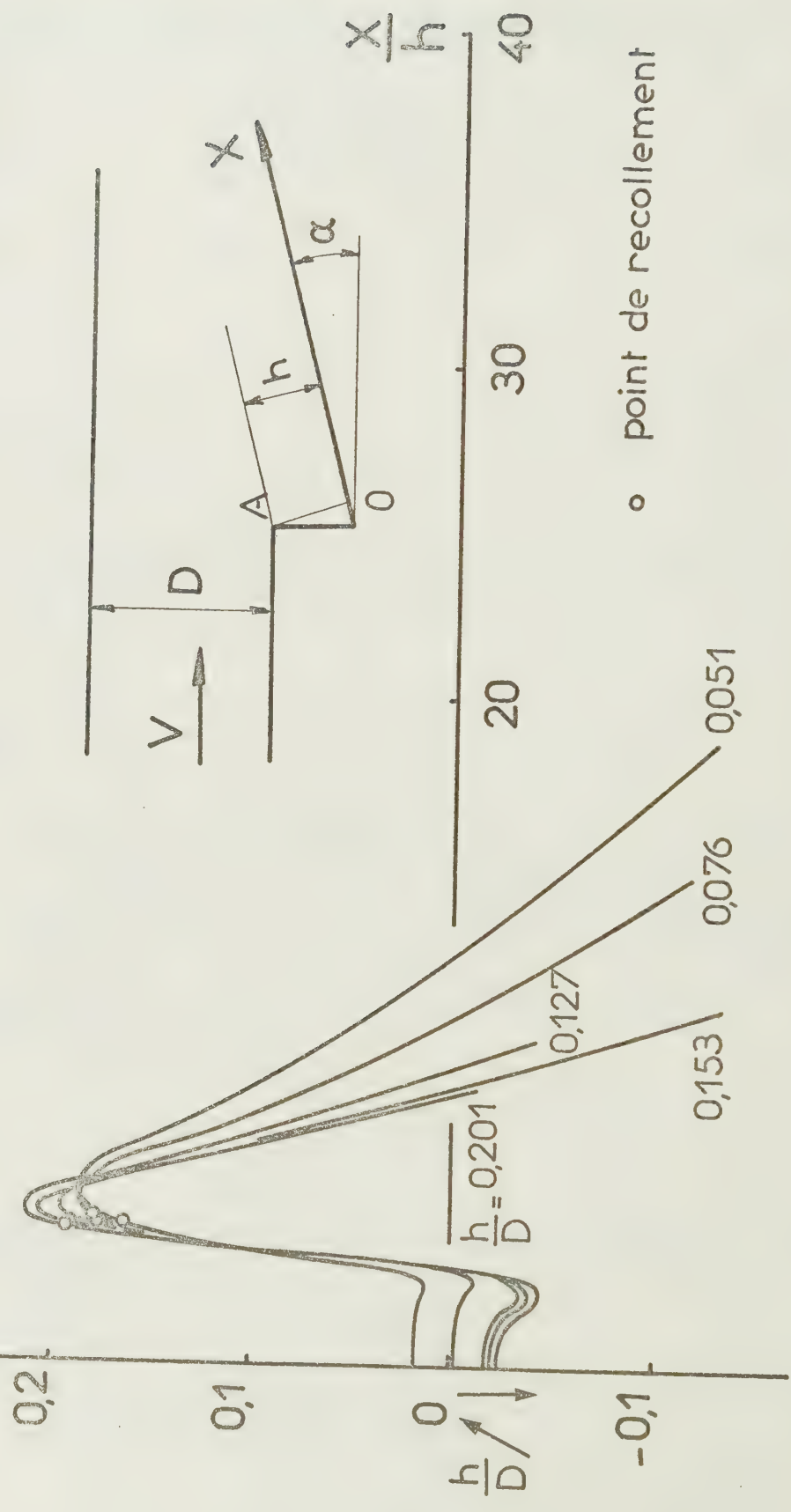
Δ point de recollement

PL.4- DISTRIBUTION PARIETALE DE PRESSION

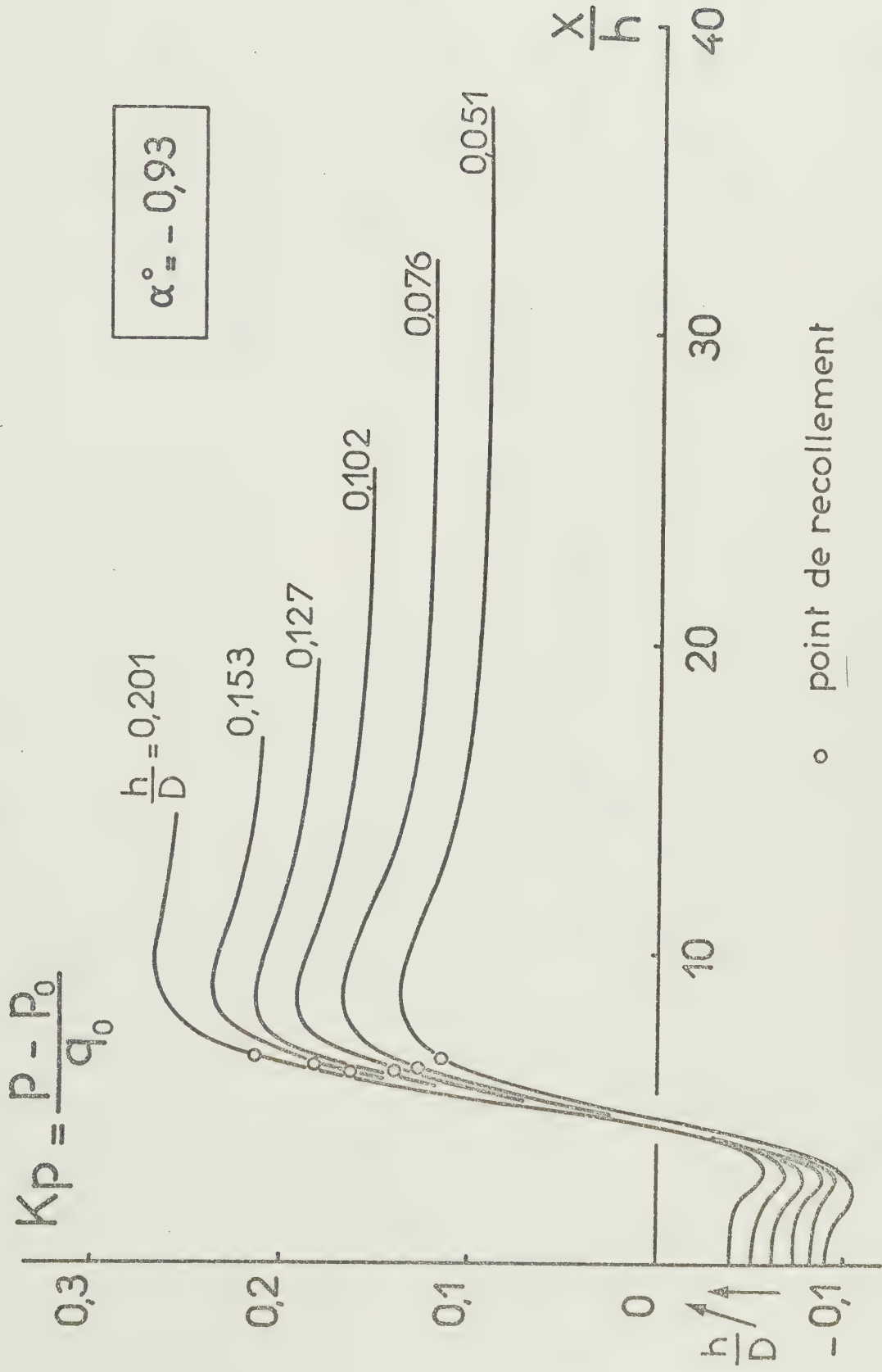
Influence de la hauteur de marche

$$Kp = \frac{p - p_0}{q_0}$$

$\alpha_0 = +7^\circ$

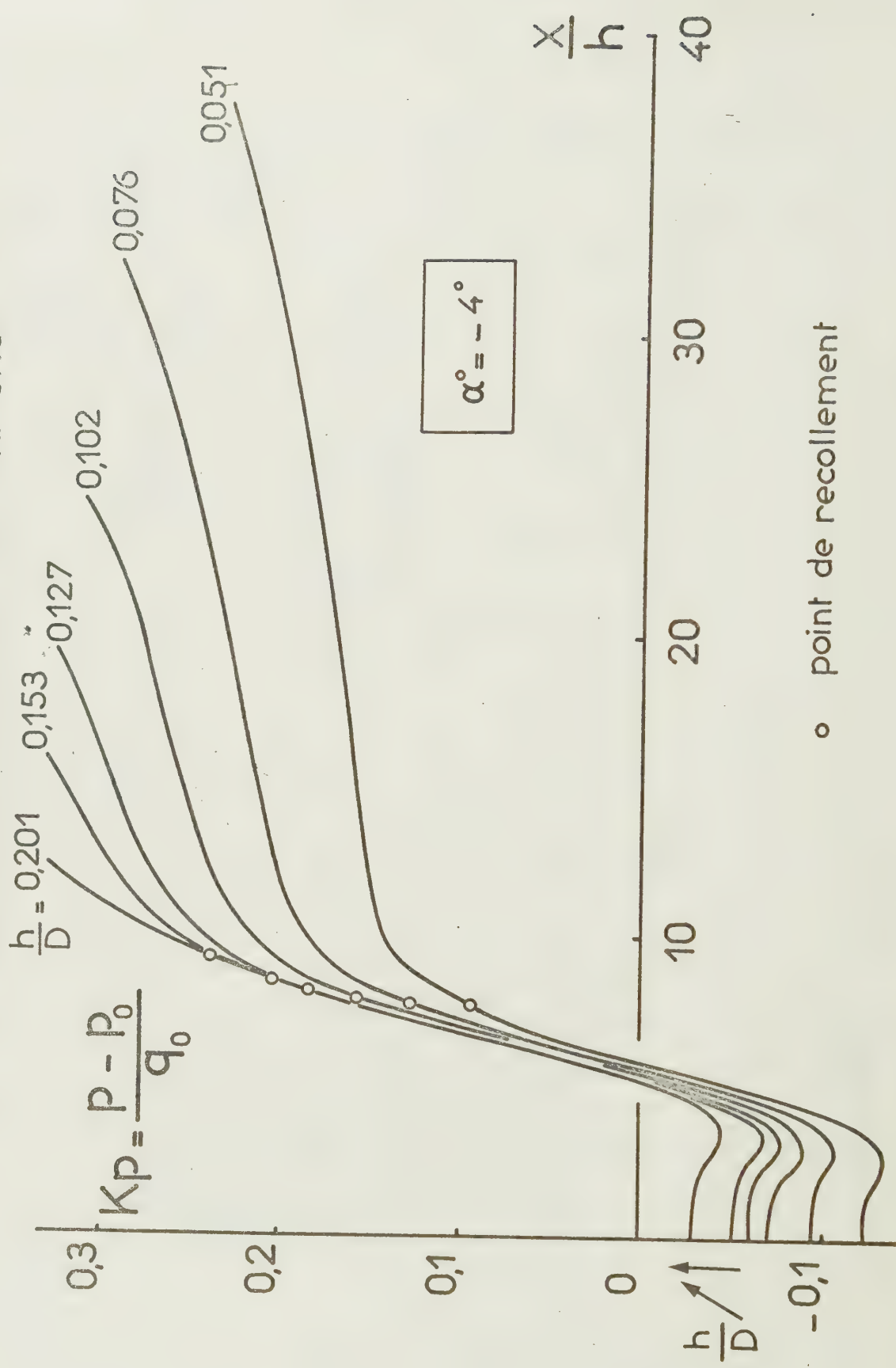


Influence de la hauteur de marche

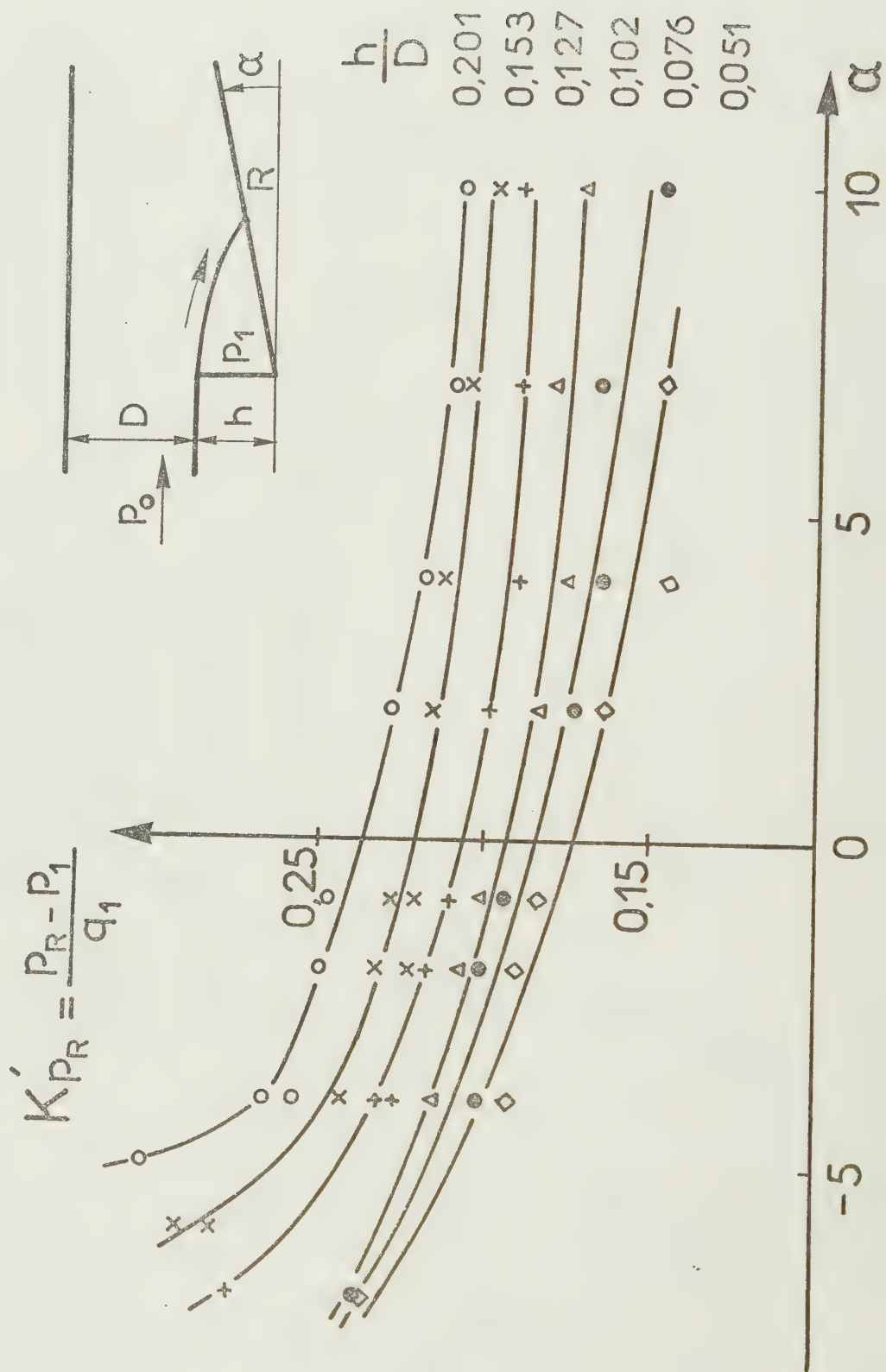


PL.6 - DISTRIBUTION PARIETALE DE PRESSION

Influence de la hauteur de marche

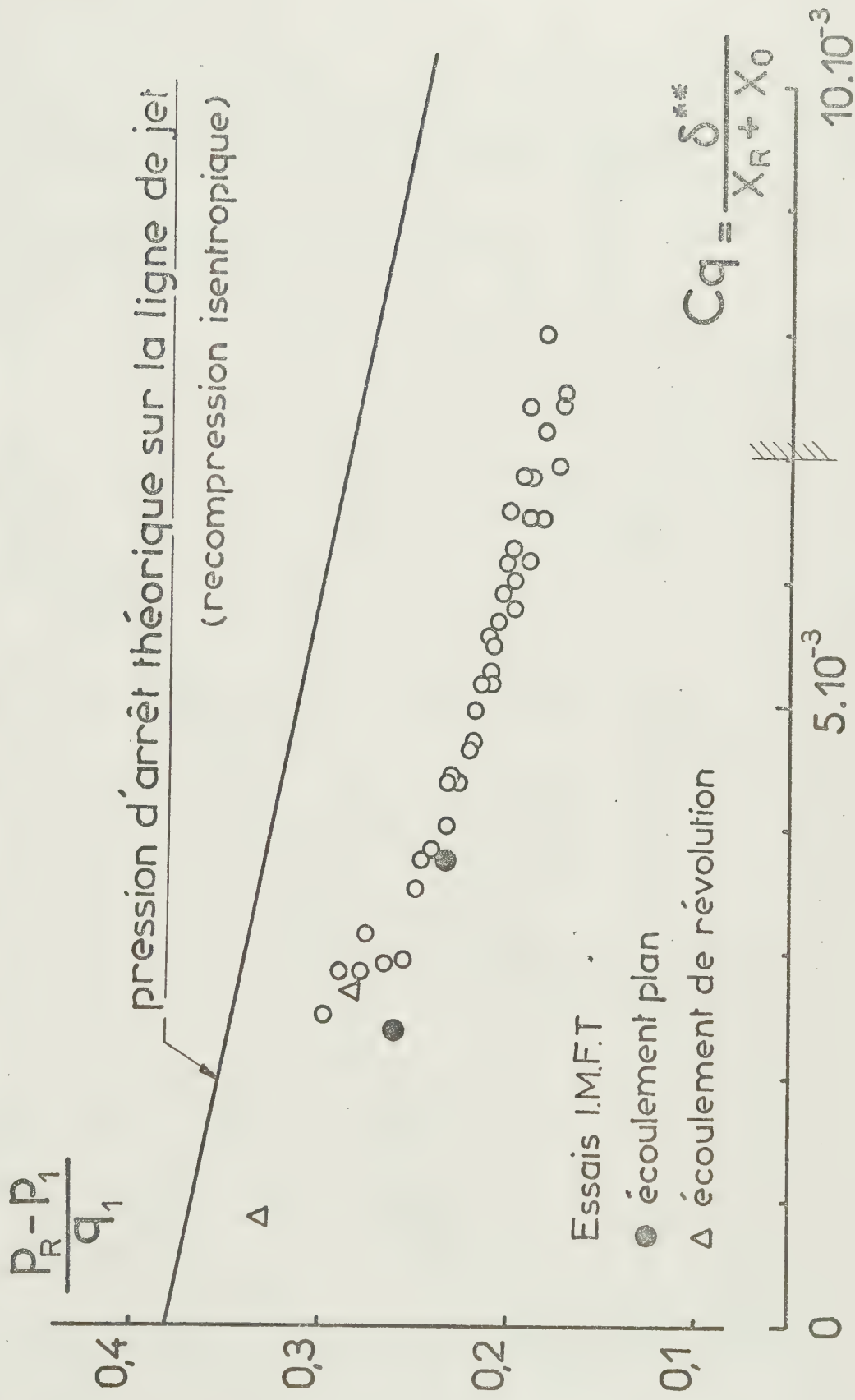


PL.8- SAUT DE PRESSION AU RECOLLEMENT



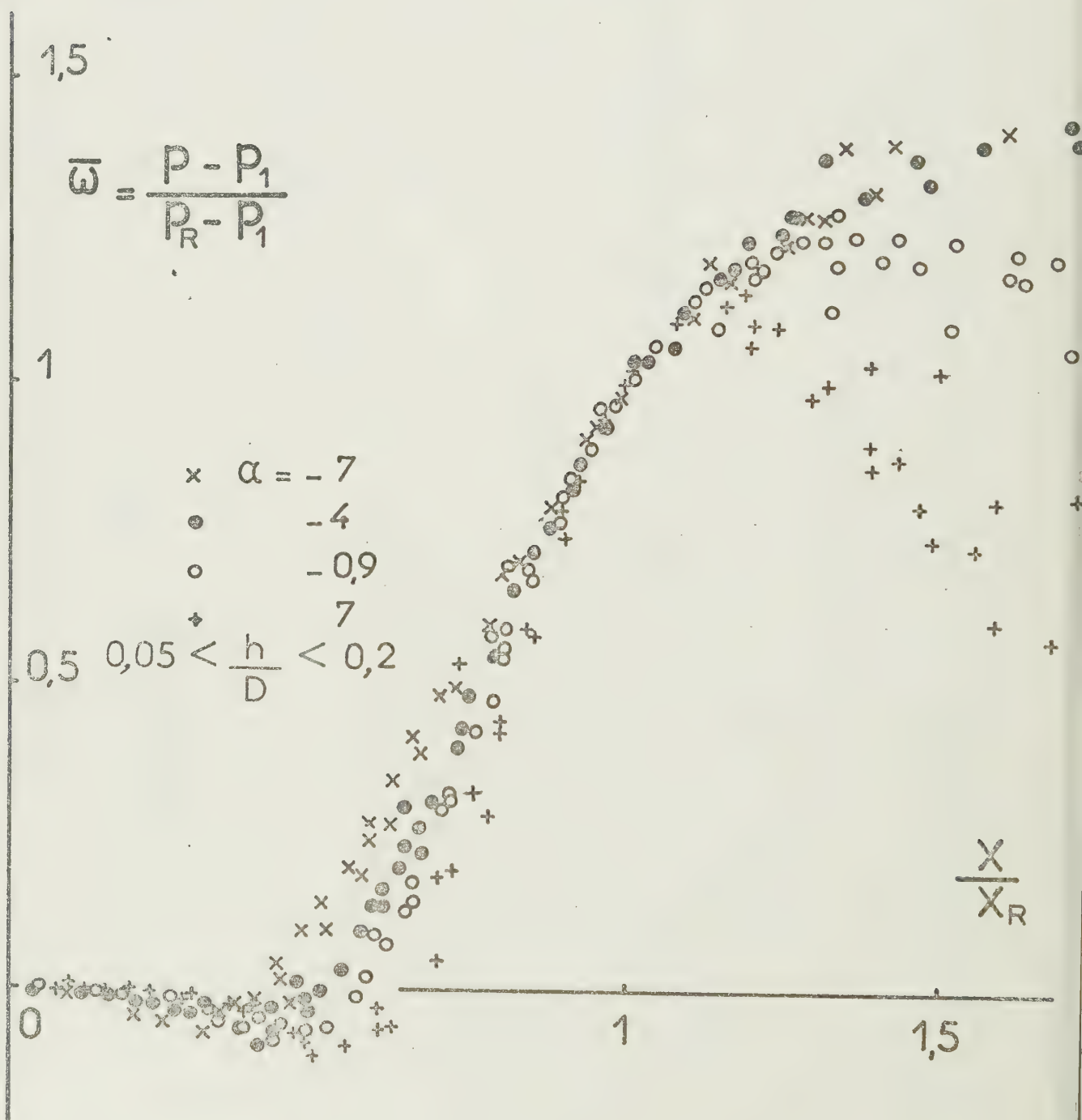
PL.9_ PRESSION AU POINT DE RECOLLEMENT

Influence de la couche limite initiale

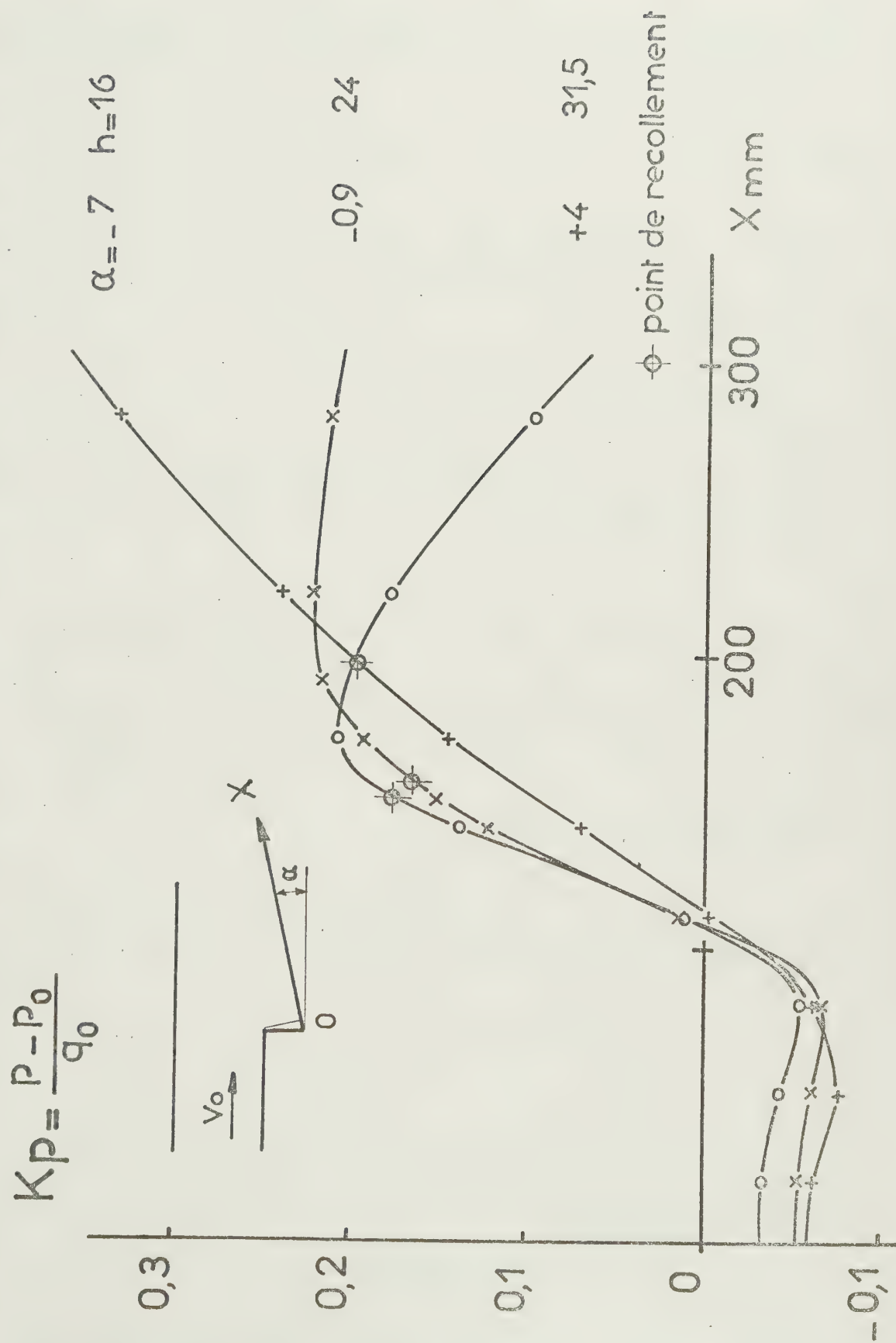


L.10- DISTRIBUTION PARIETALE DE PRESSION

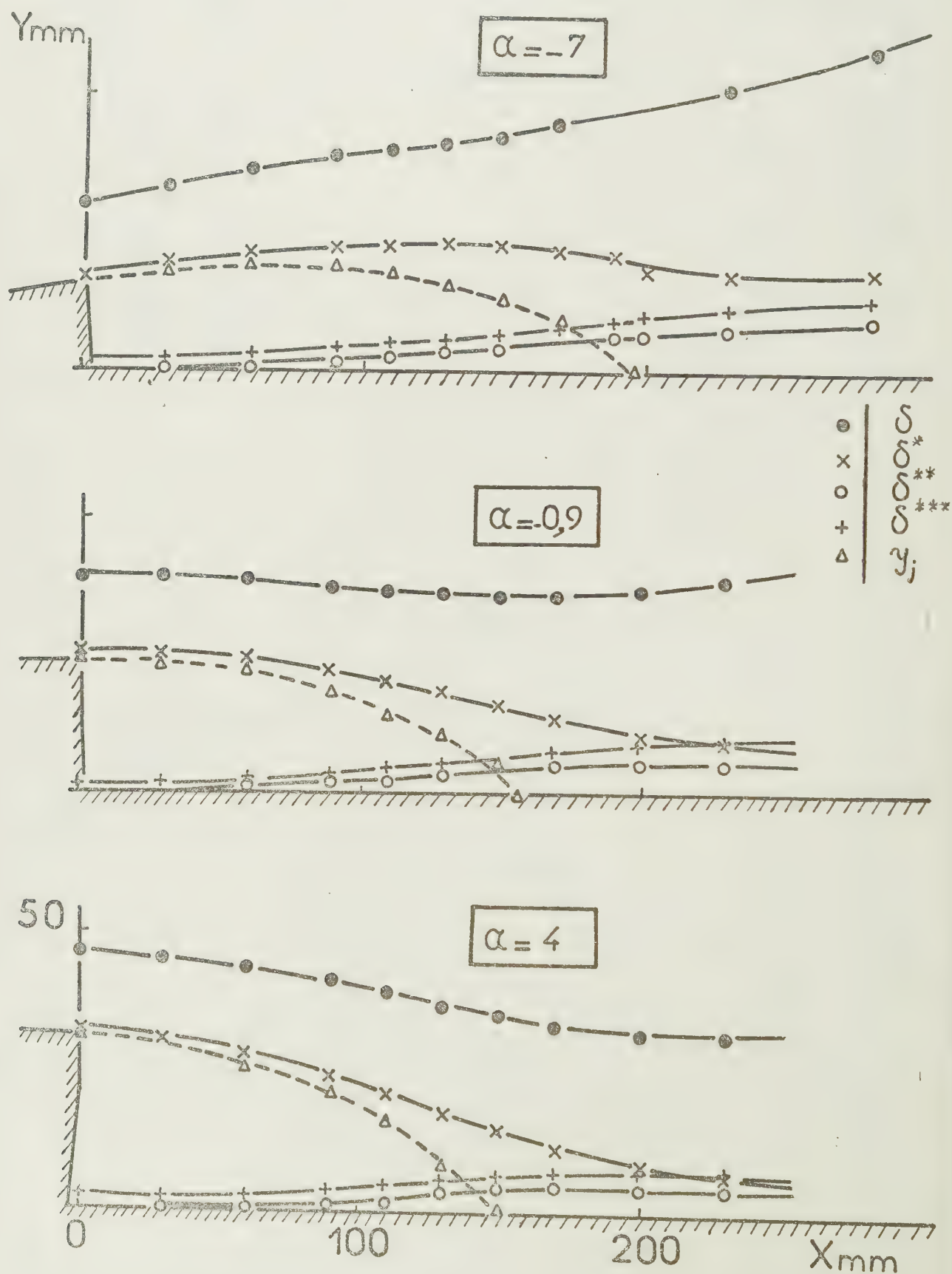
Coordonnées réduites



PL.11 - DISTRIBUTION PARIETALE DE PRESSION

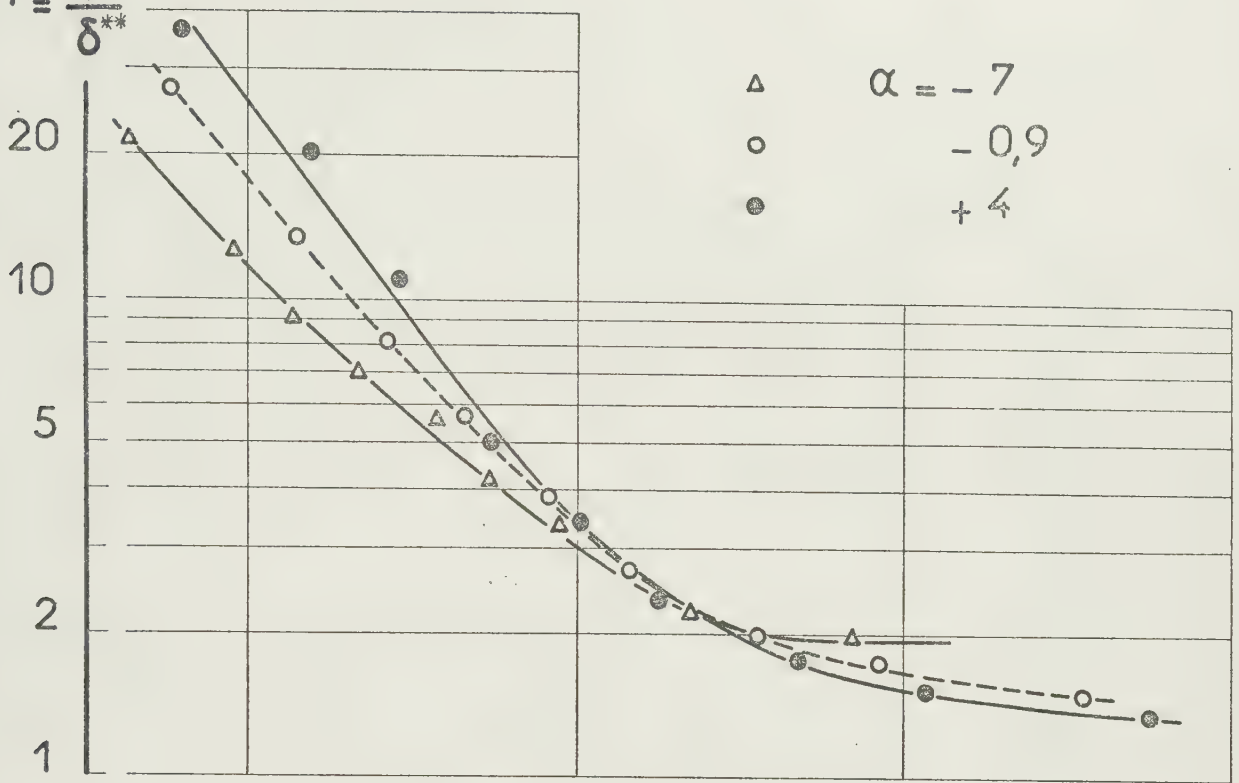


L.12_ EPAISSEURS CARACTERISTIQUES

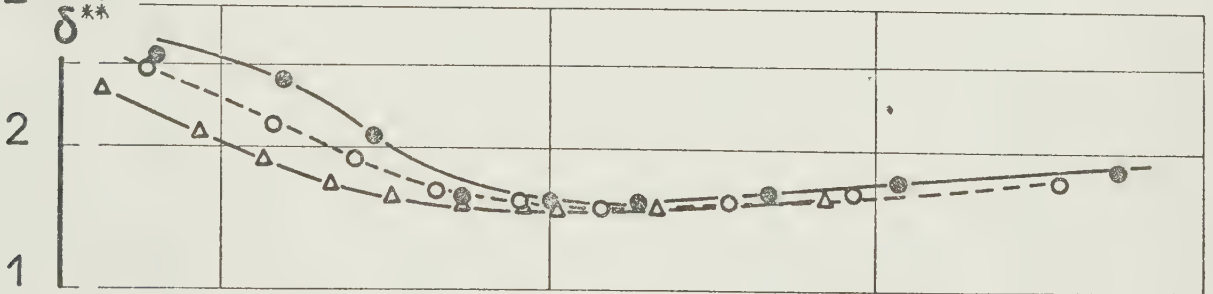


PL.13 _ PARAMETRES DE FORME

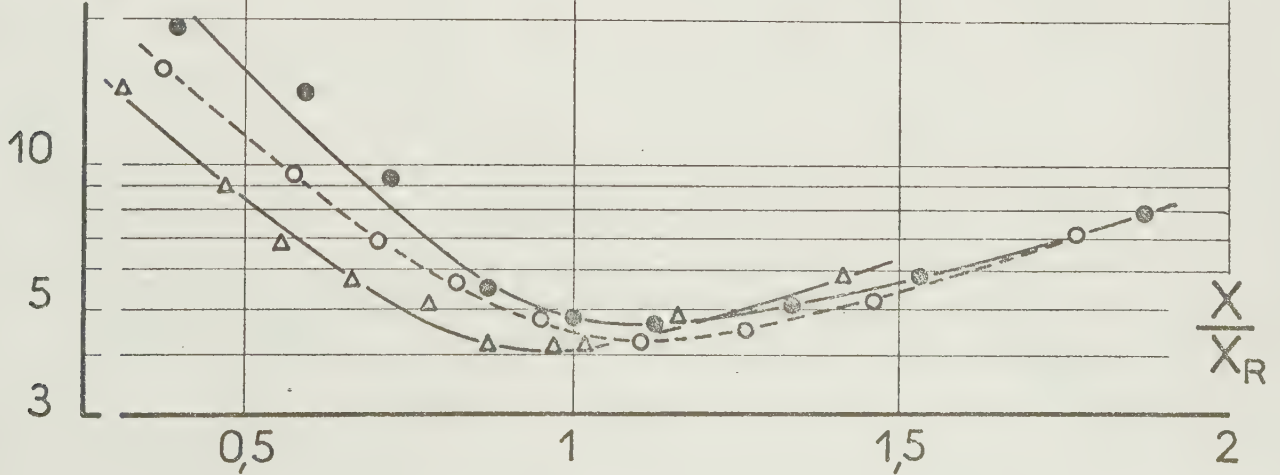
$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$$



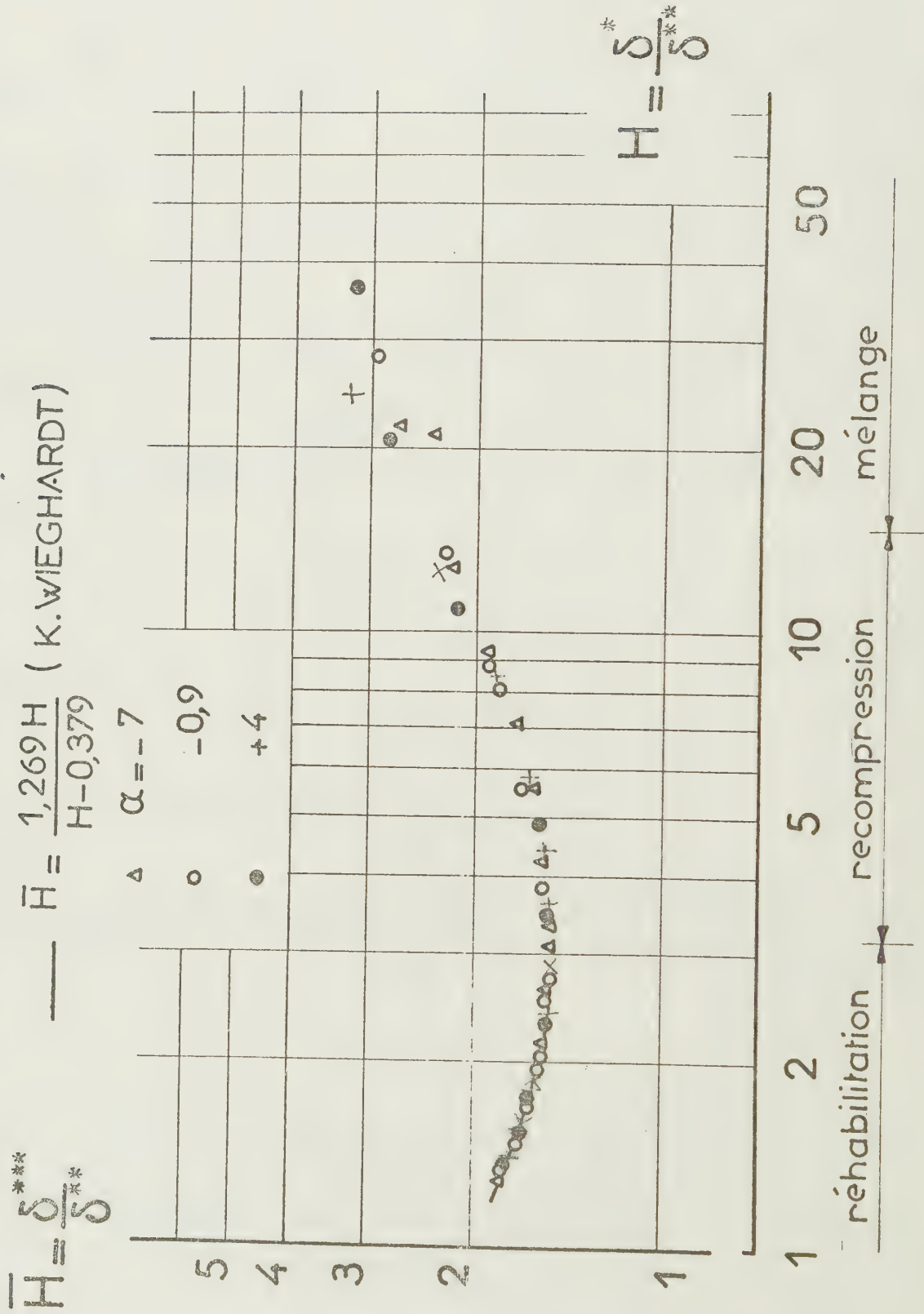
$$\bar{H} = \frac{\delta^{***}}{\delta^{**}}$$



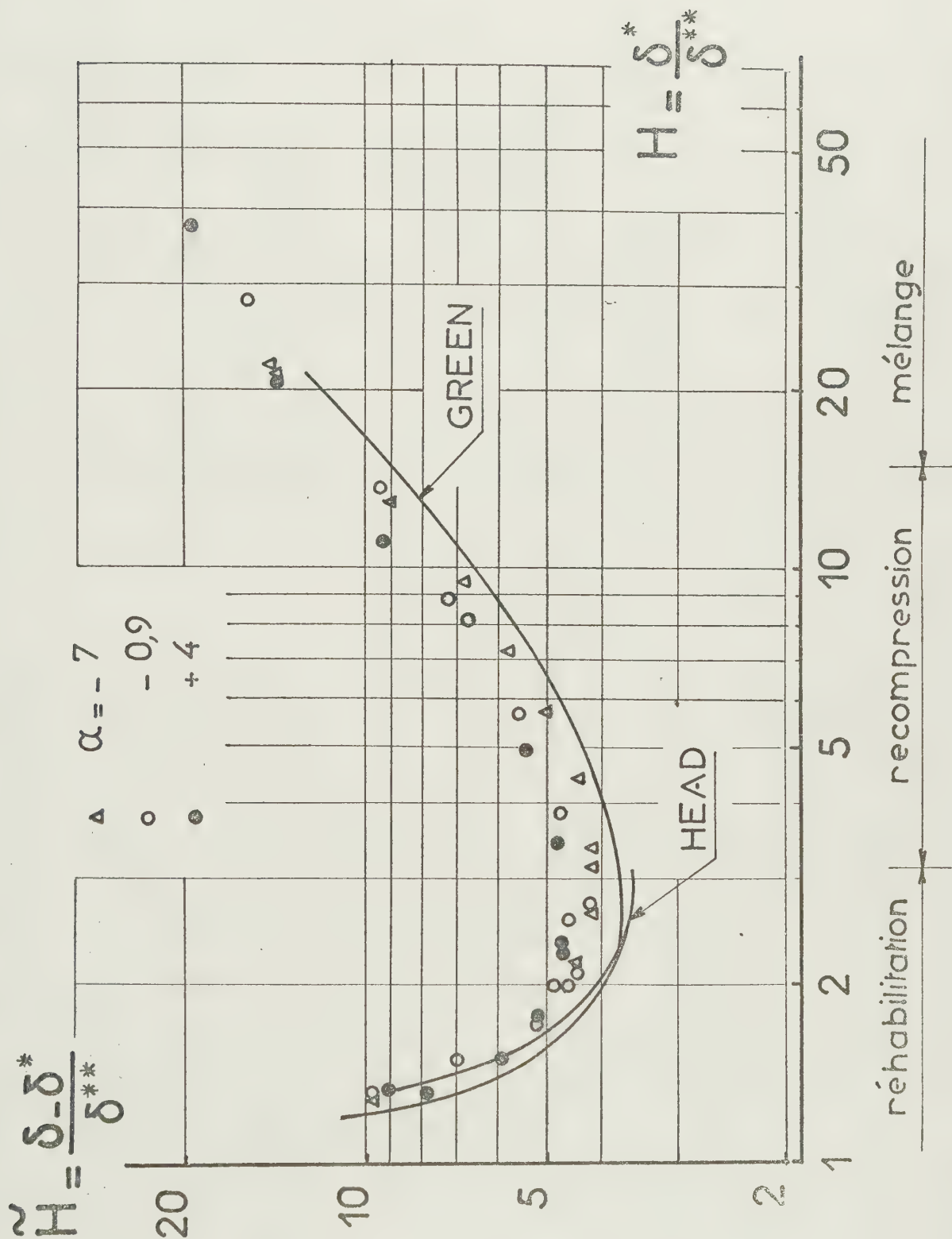
$$\tilde{H} = \frac{\delta - \delta^*}{\delta^{**}}$$



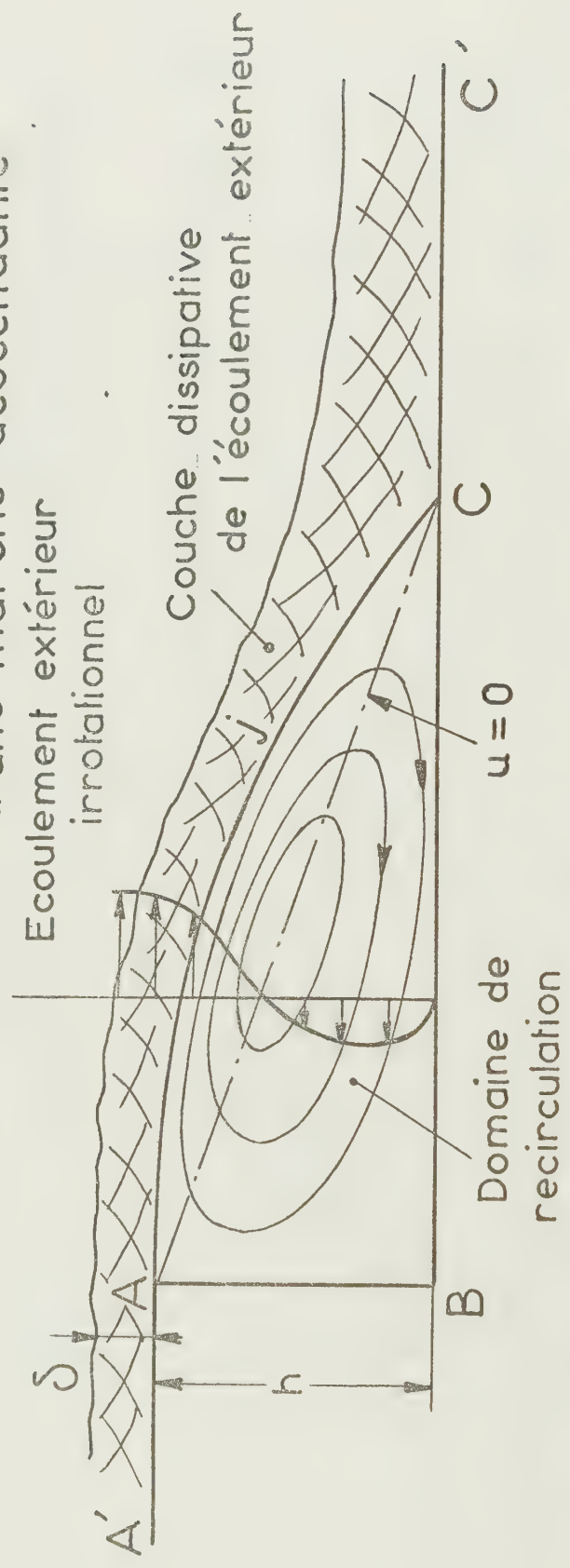
PL.14 _ PARAMETRES DE FORME



PL.15 - PARAMETRES DE FORME



a) Schéma de l'écoulement incompressible en aval d'une marche descendante



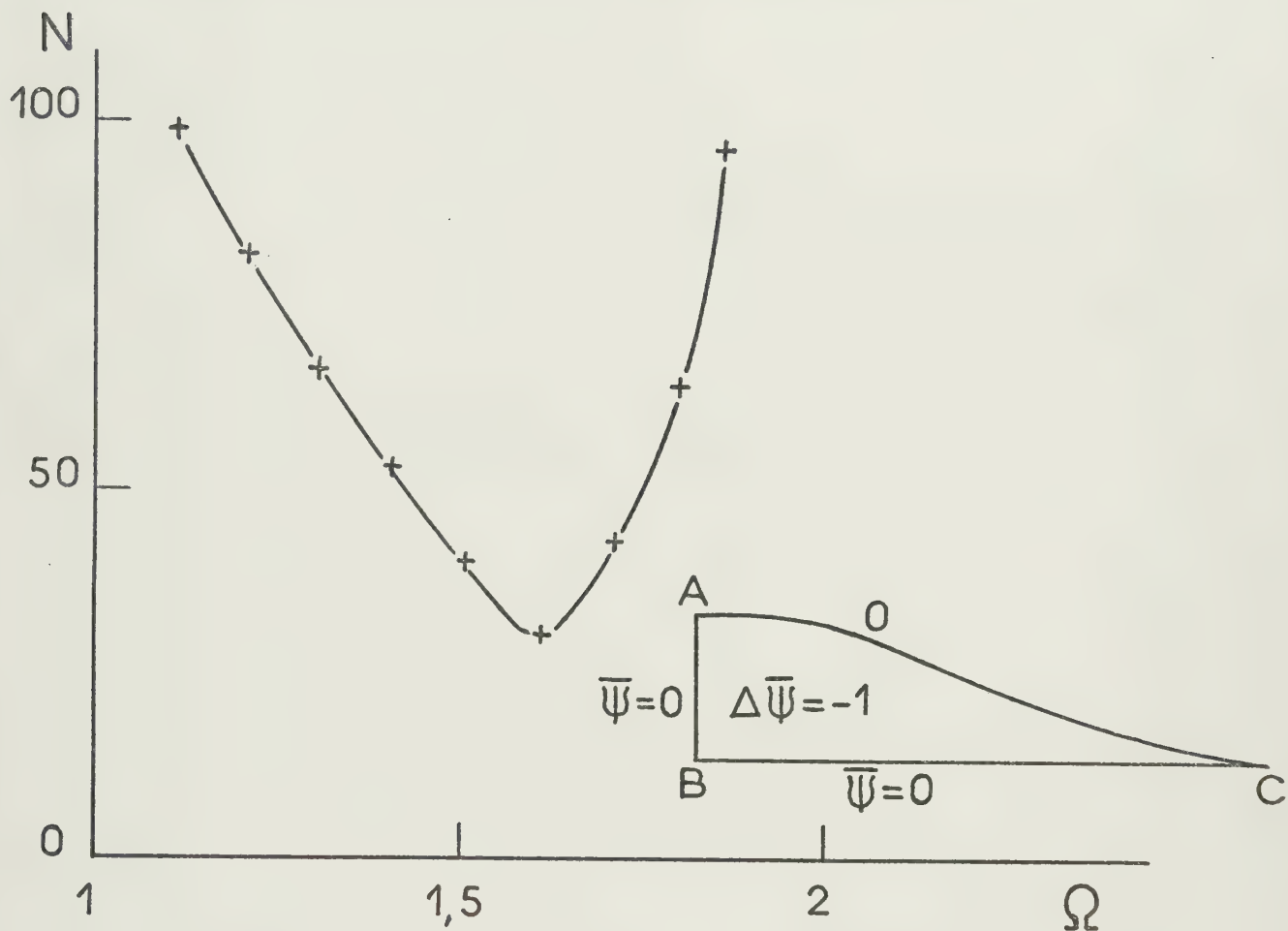
b) Cas limite ($\mathcal{R}_e \rightarrow \infty$) $\Rightarrow \frac{\delta}{h} \rightarrow 0$ (modèle de BATCHELOR)

$\Delta\psi = 0$ (écoulement extérieur irrotationnel)

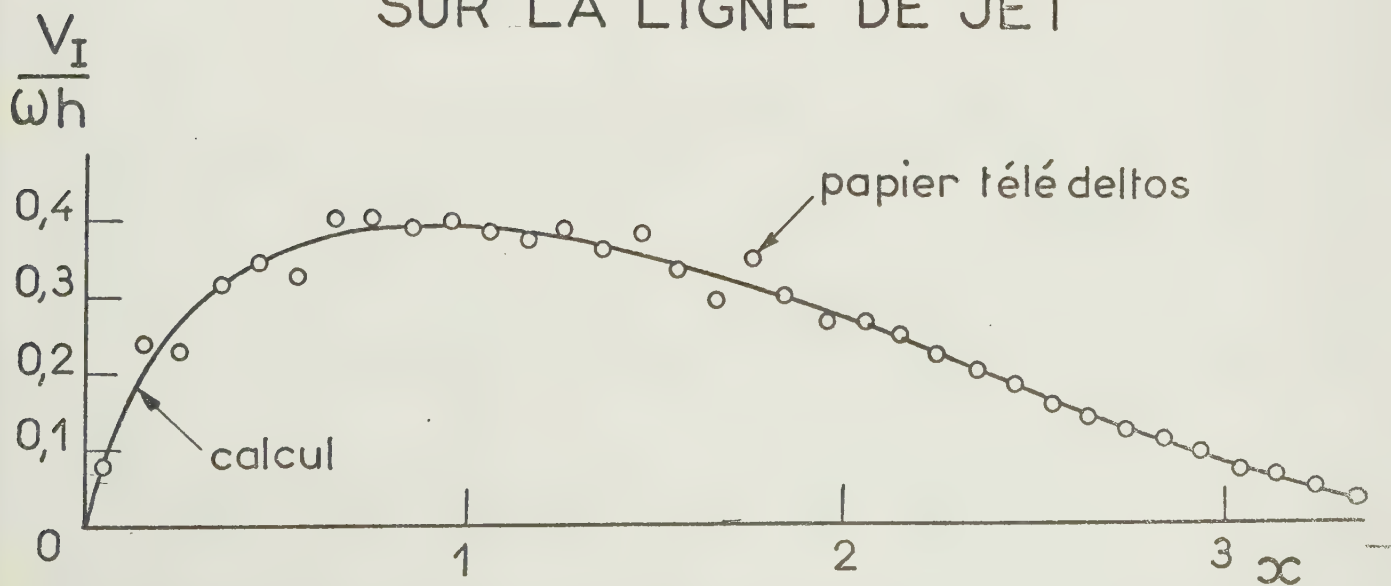


$\Delta\psi = -\omega = \text{cte}$ (écoulement de recirculation à rotationnel constant)

Pl. 16b - CHOIX DE Ω OPTIMUM

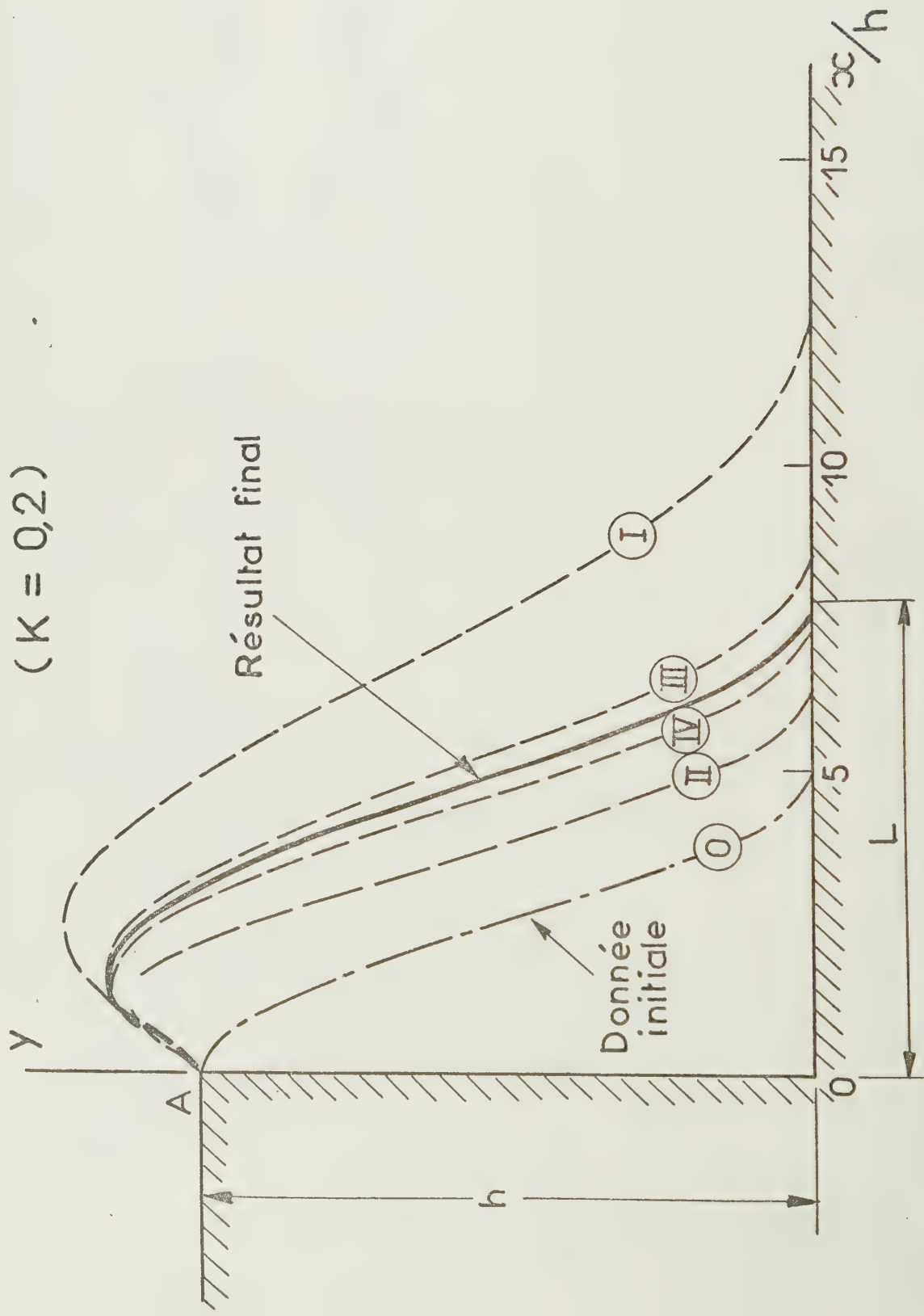


REPARTITION DE VITESSE $\frac{V_I}{\omega h}$ SUR LA LIGNE DE JET



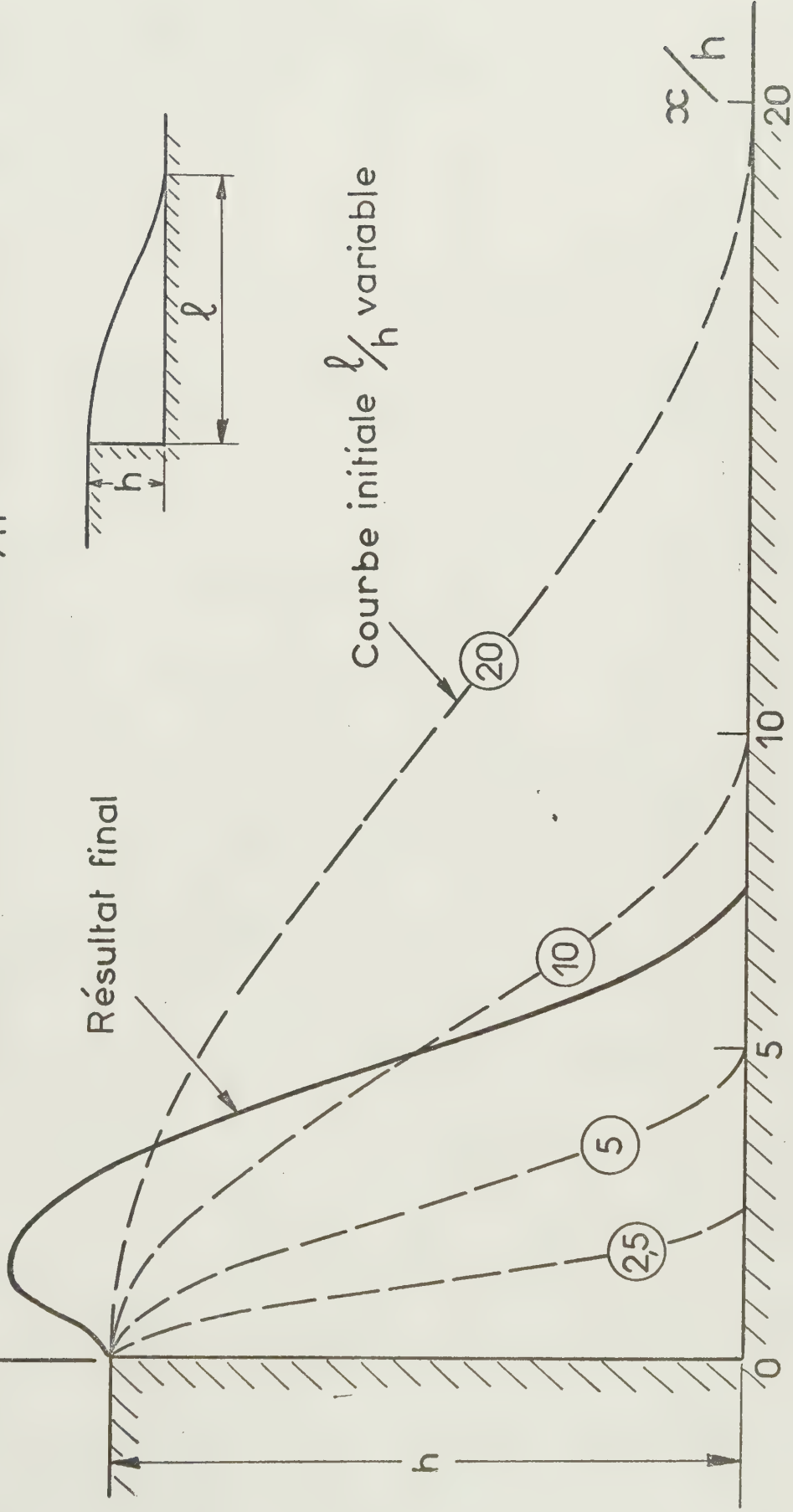
Pl.17_ EVOLUTION DE LA LIGNE DE JET (j) AU COURS DES PREMIERES ITERATIONS

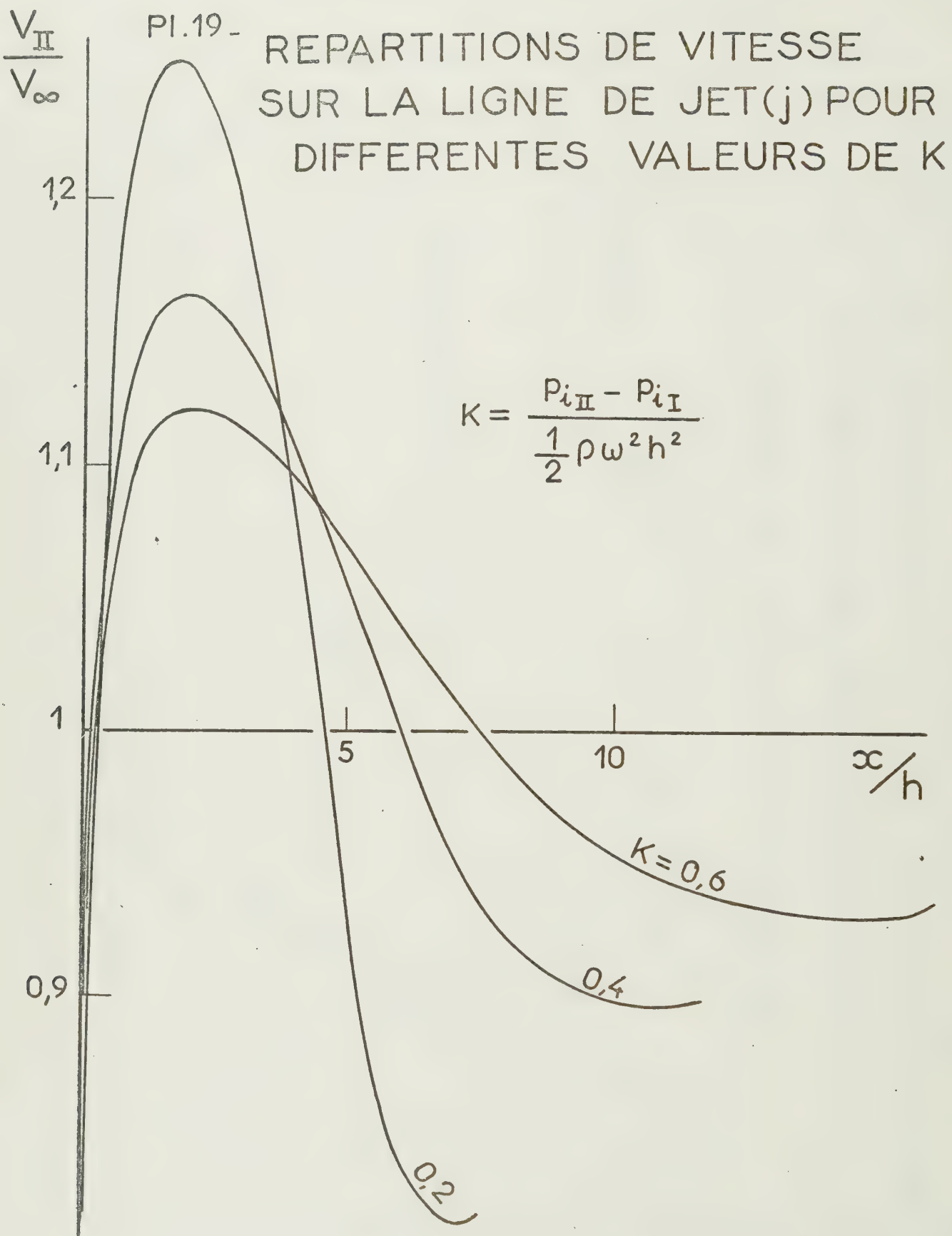
(K = 0,2)



CONVERGENCE DU CALCUL NUMERIQUE ET UNICITE DE LA SOLUTION NUMERIQUE (K=0,2)

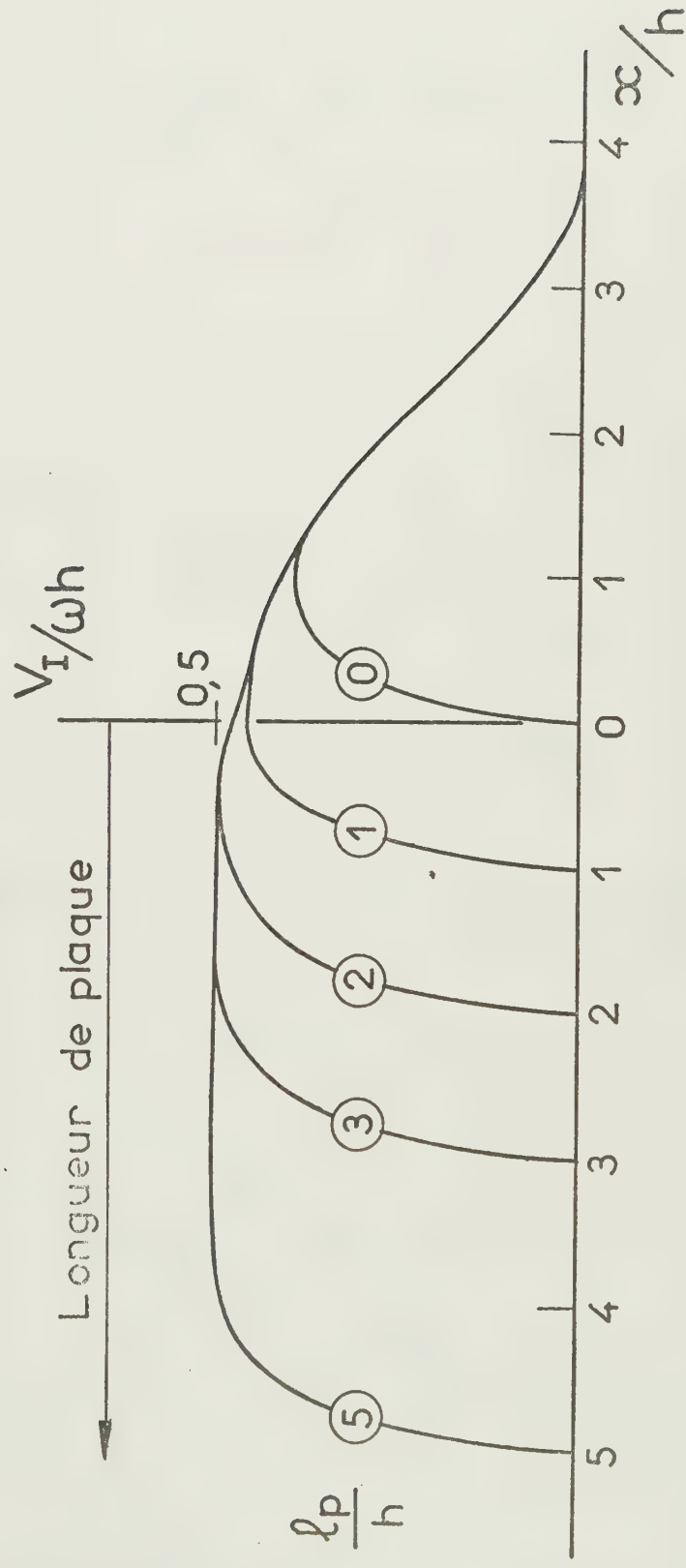
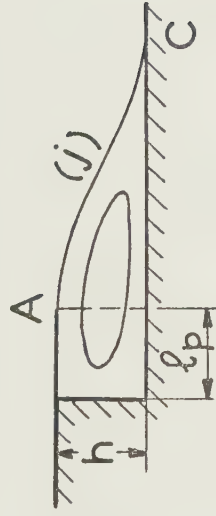
Donnée initiale : sinusoïde ℓ/h variable





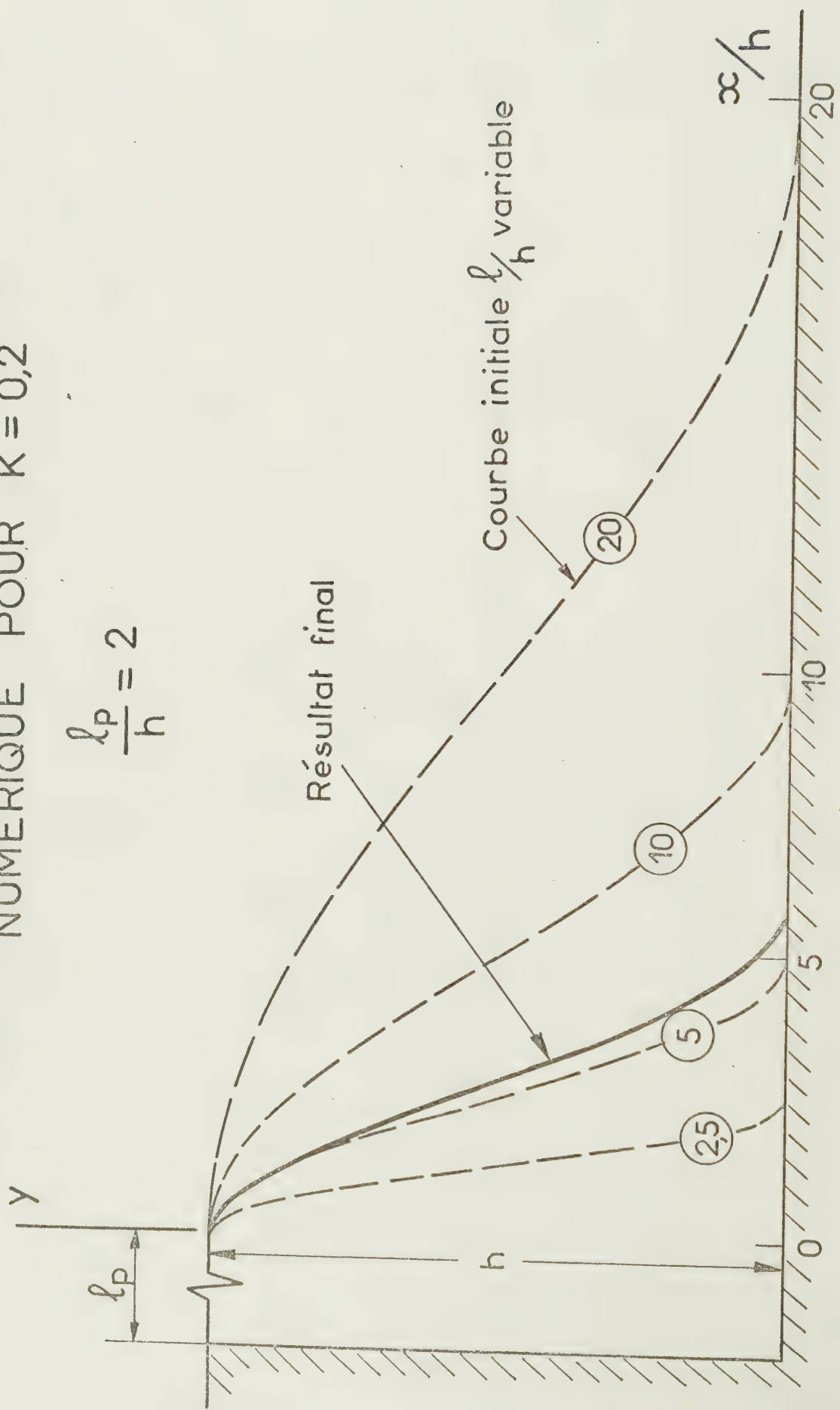
PI.20_INFLUENCE DE LA FORME DE LA CAVITE

(répartition de vitesse sur la ligne de jet)

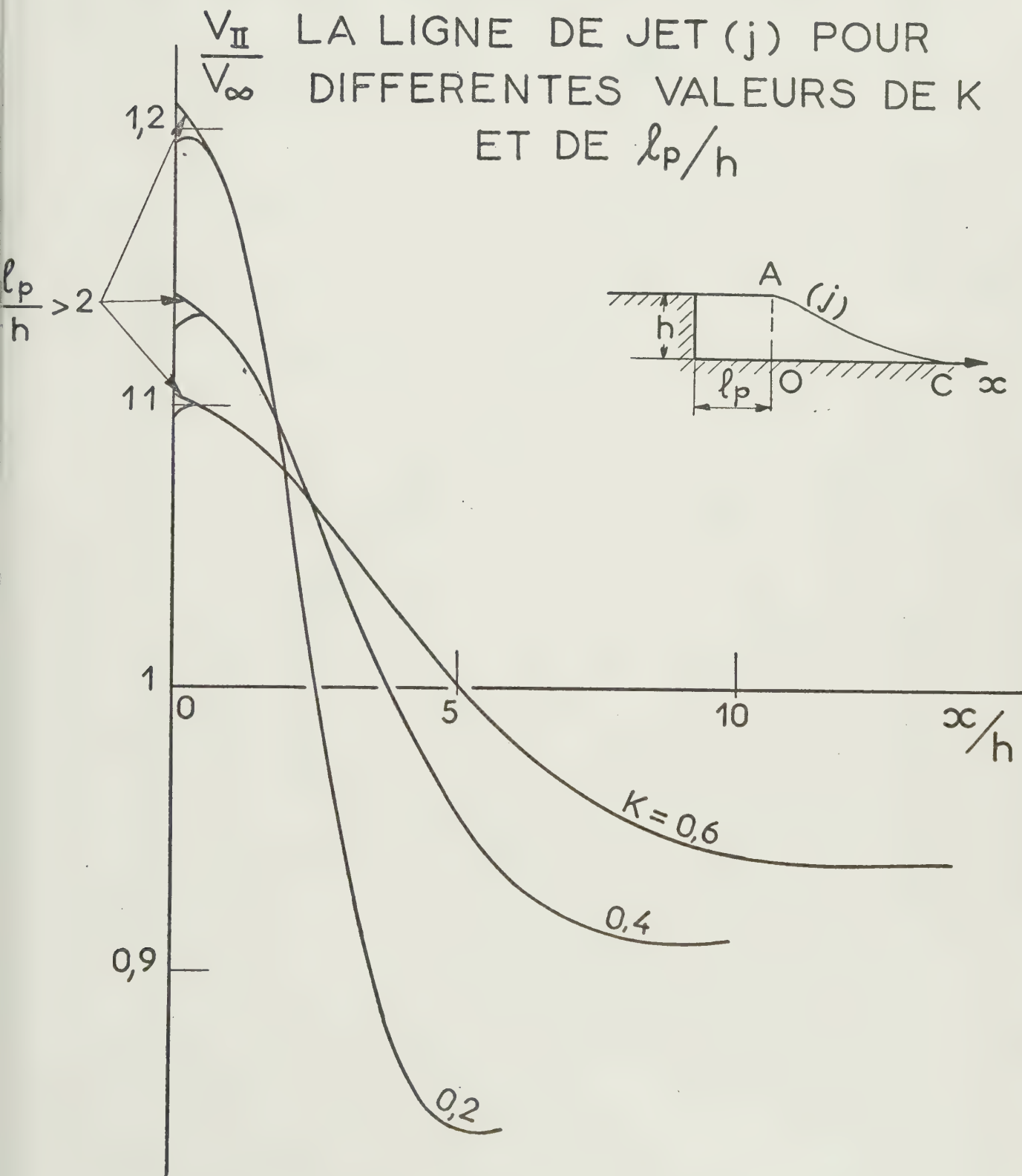


PI.21 - CONVERGENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION
NUMERIQUE POUR $K=0,2$

$$\frac{l_p}{h} = 2$$



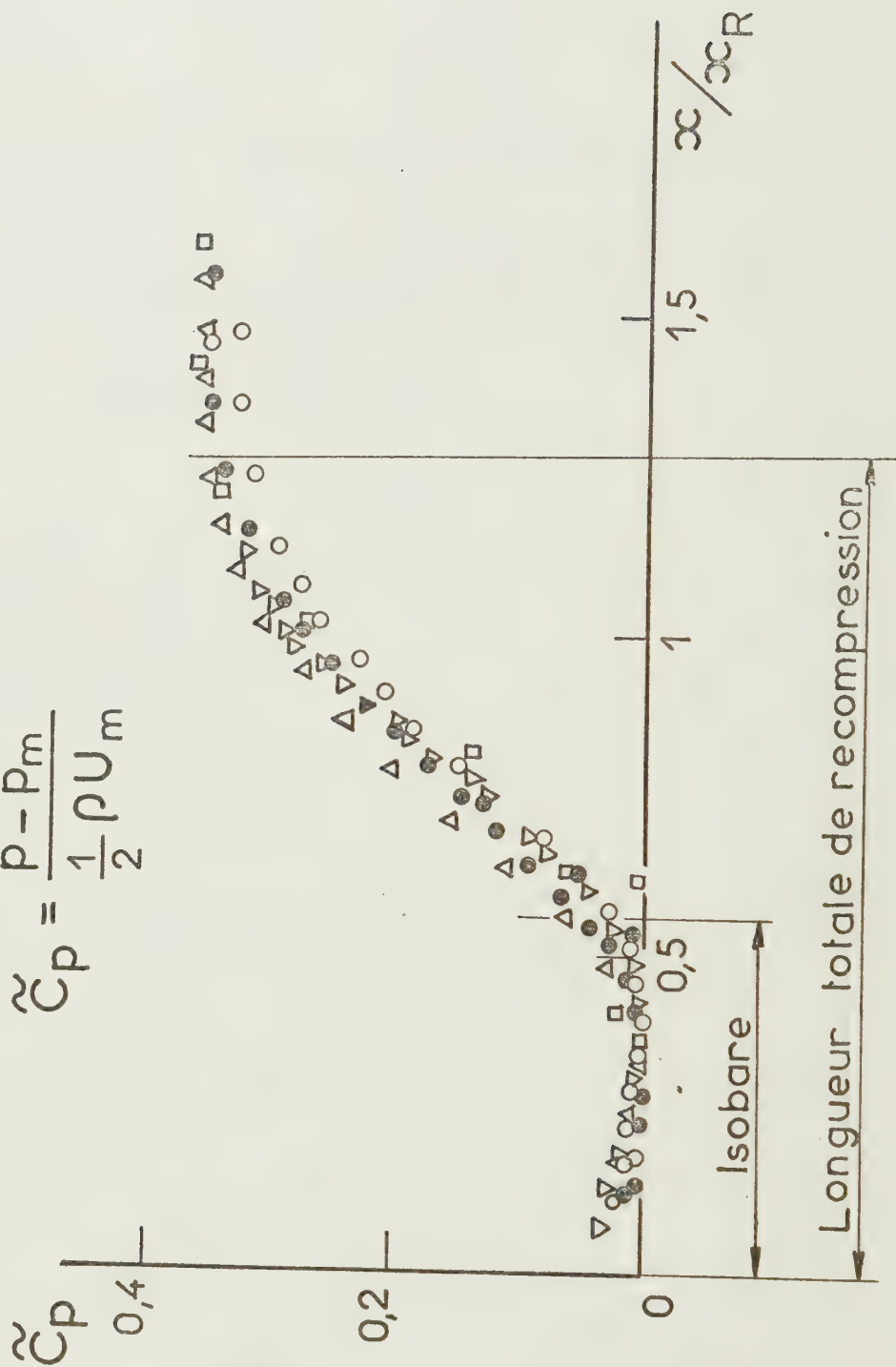
PI. 22 REPARTITIONS DE VITESSE SUR
 LA LIGNE DE JET (j) POUR
 DIFFERENTES VALEURS DE K
 ET DE ℓ_p/h



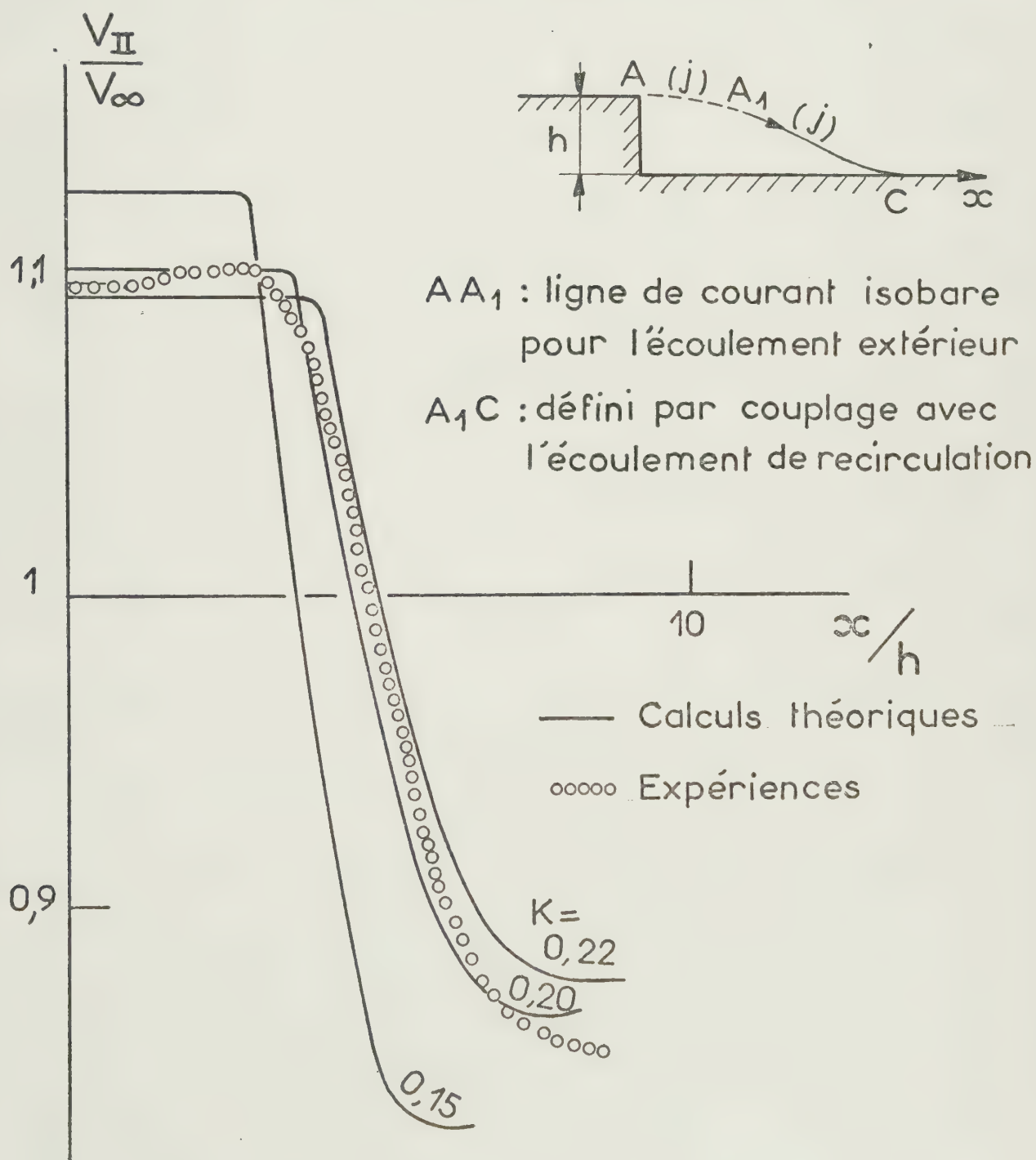
Pl. 23 - REPARTITION DE PRESSION EXPERIMENTALE

ROSHKO et LAU

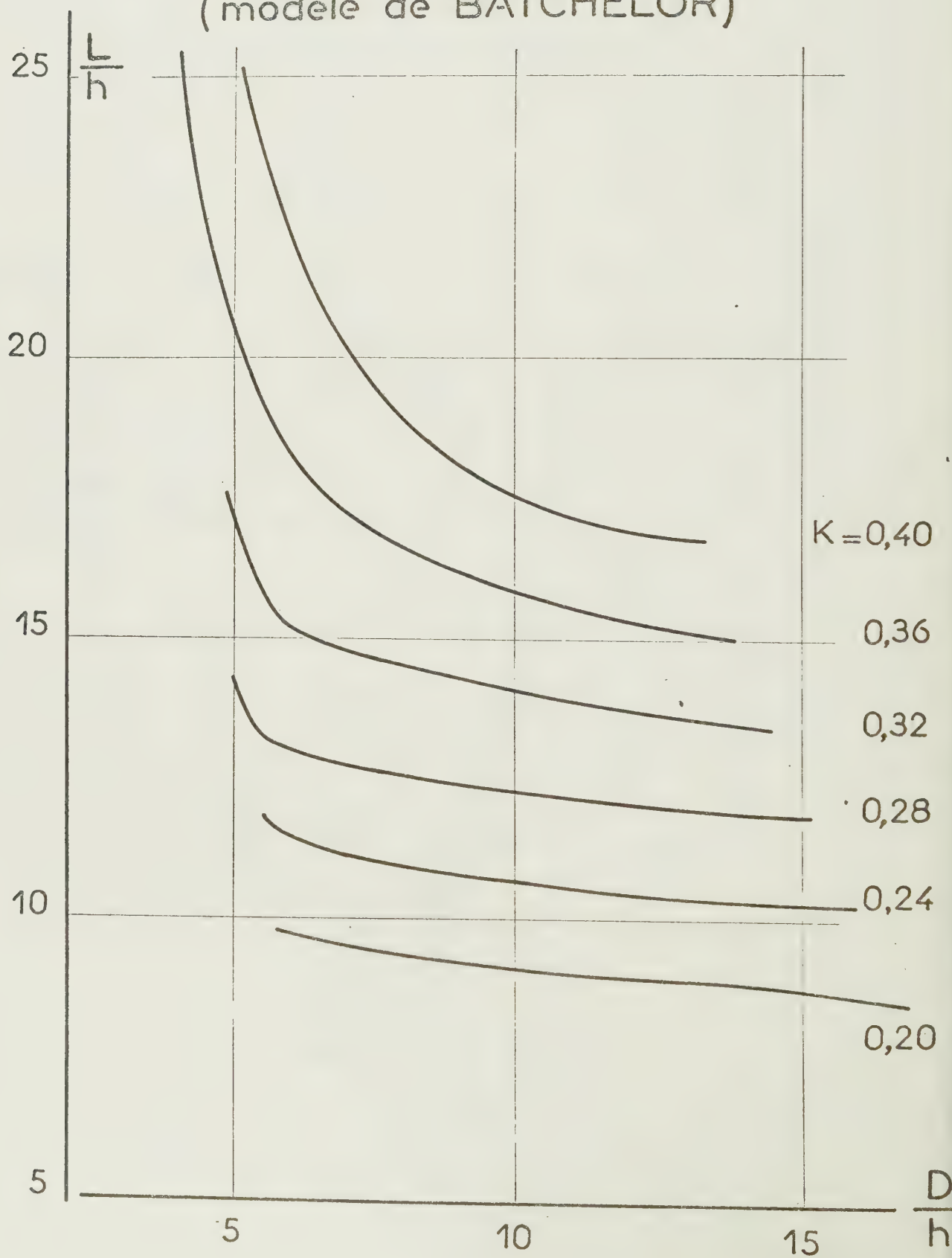
$$\tilde{C}_p = \frac{p - p_m}{\frac{1}{2} \rho U_m^2}$$



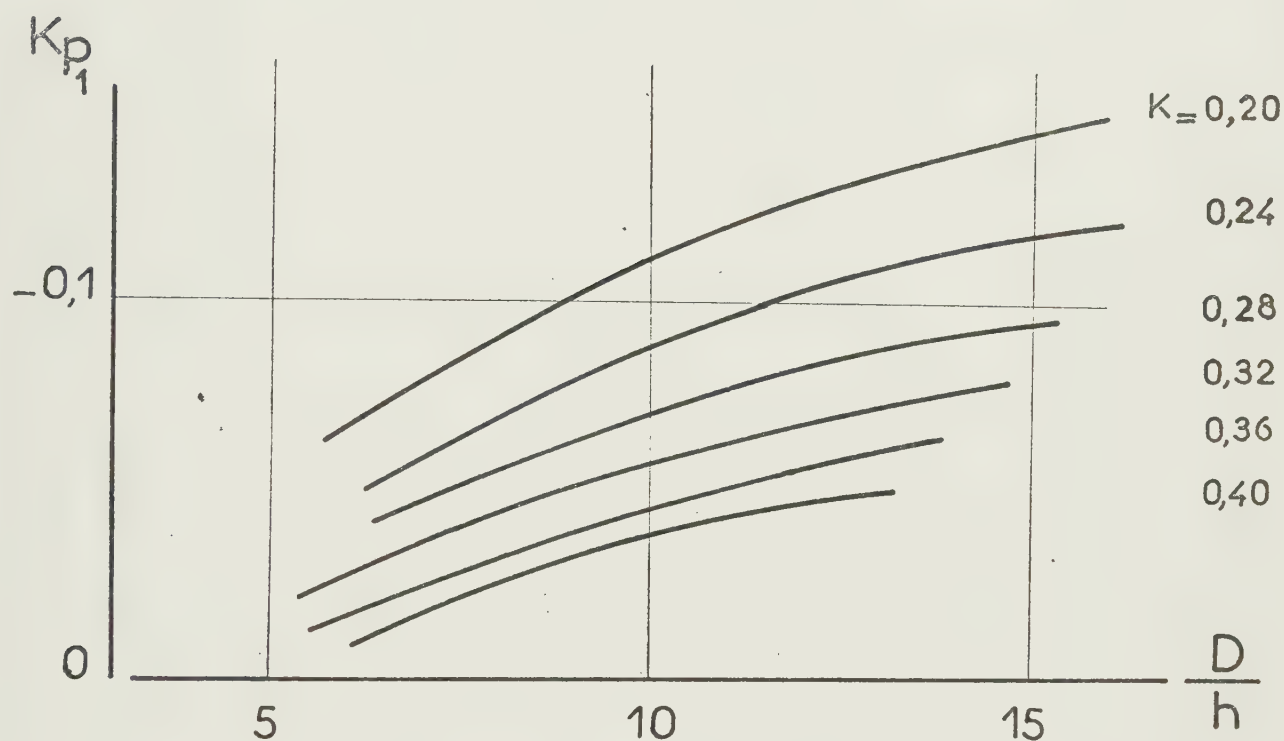
Pl.24 - REPARTITION LONGITUDINALE DE
VITESSE SUR LA LIGNE DE JET
(modèle avec partie isobare)



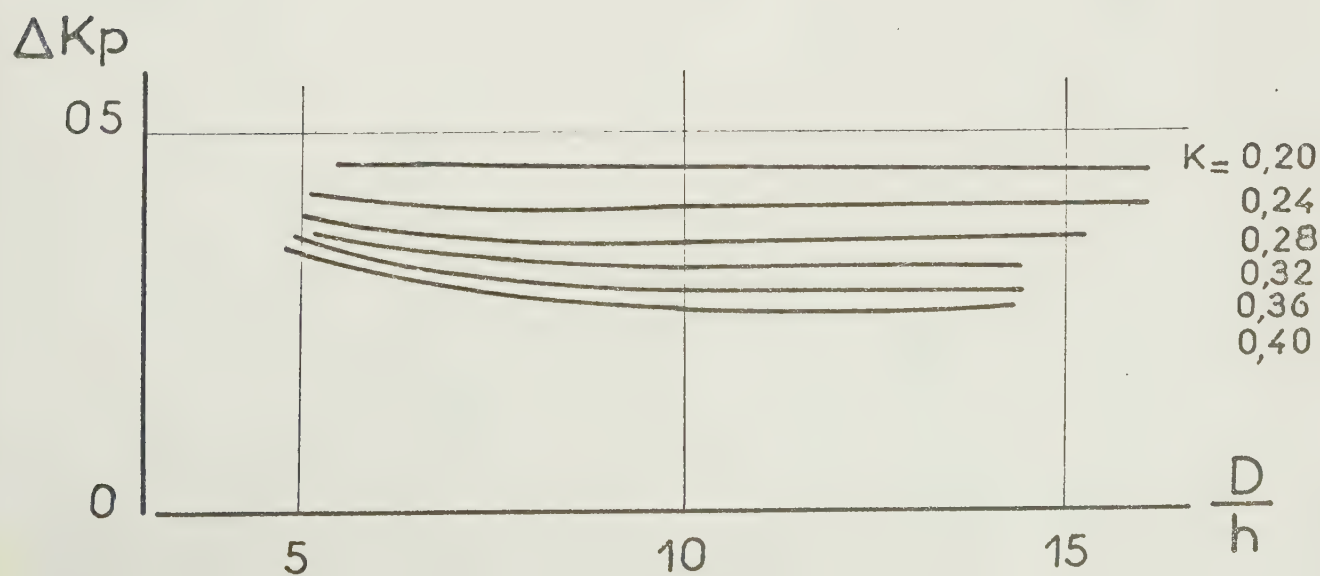
PI. 25. EVOLUTION DE $\frac{L}{h}$ EN FONCTION DE $\frac{D}{h}$
 POUR DIFFERENTES VALEURS DE K
 (modèle de BATCHELOR)



1.26. EVOLUTION DE PRESSION AU CULOT $K_{p_1} = \frac{p_1 - p_\infty}{q_\infty}$
(modèle de BATCHELOR)

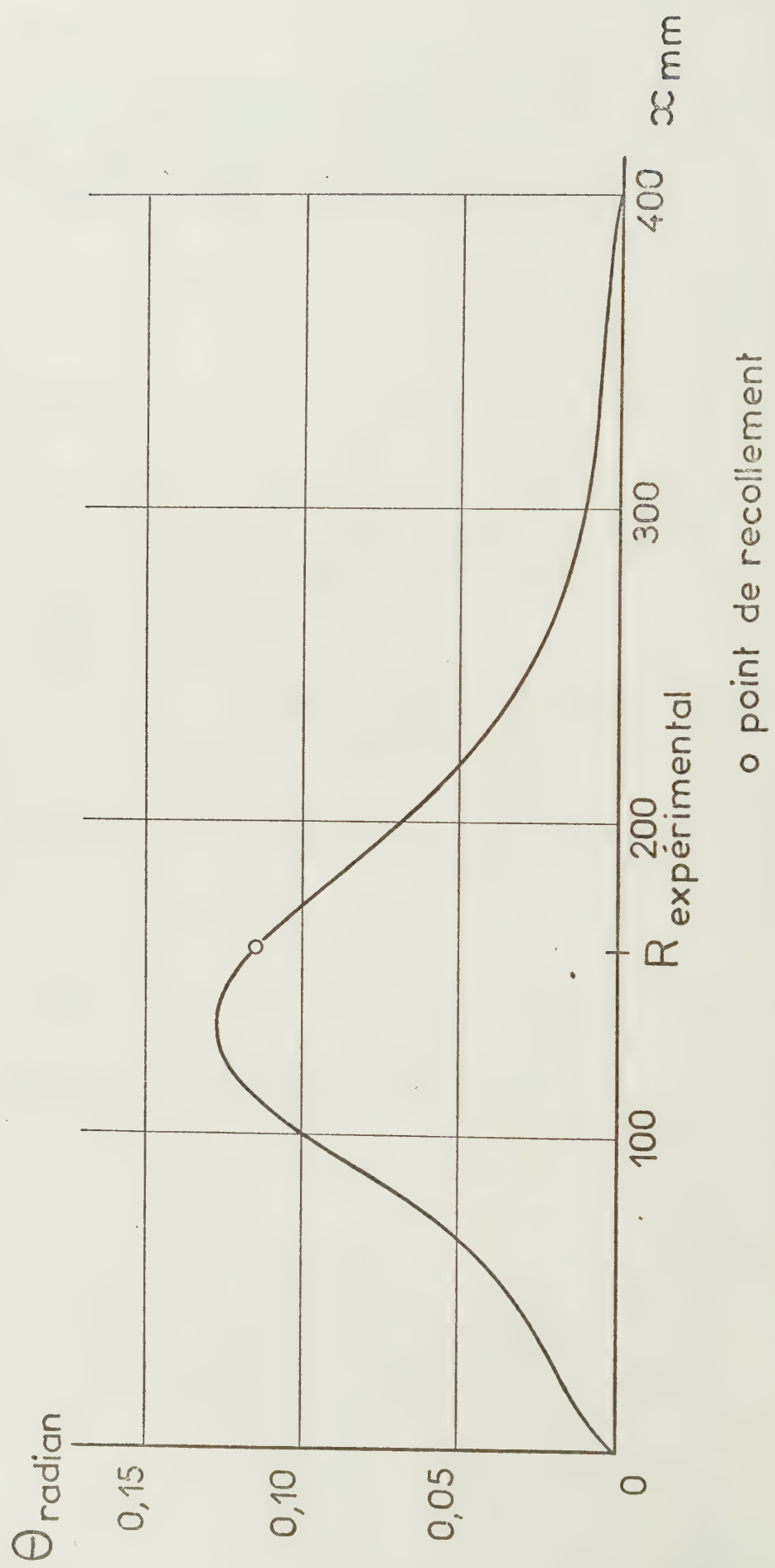


PI 27. EVOLUTION DU SAUT DE PRESSION ΔK_p
(modèle de BATCHELOR)



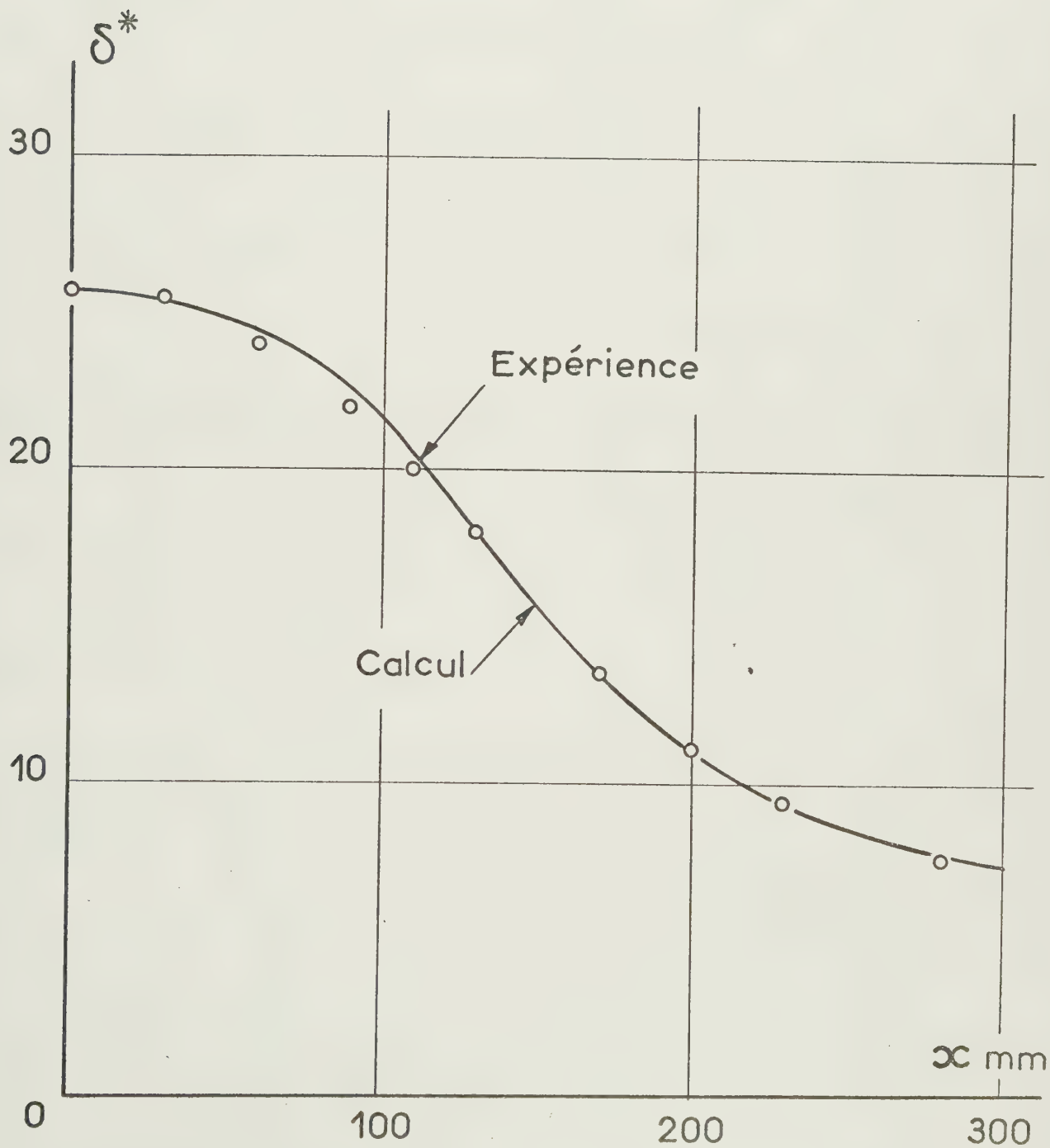
Pl. 28. - EVOLUTION DE L'INCLINAISON θ DE LA VITESSE

$h = 24 \text{ mm}$

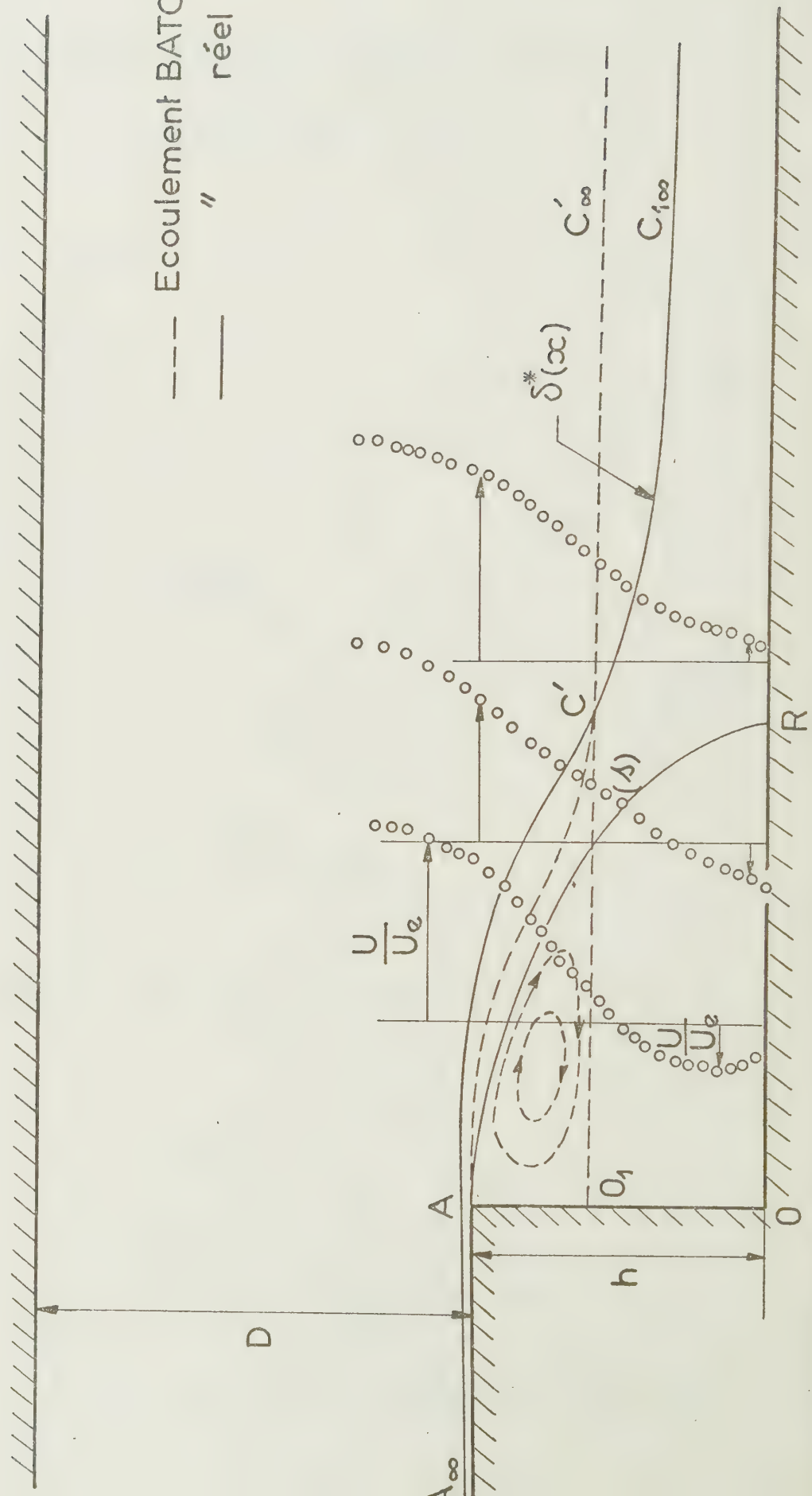


Pl.29 _ EVOLUTION DE δ^*

$h = 24 \text{ mm}$



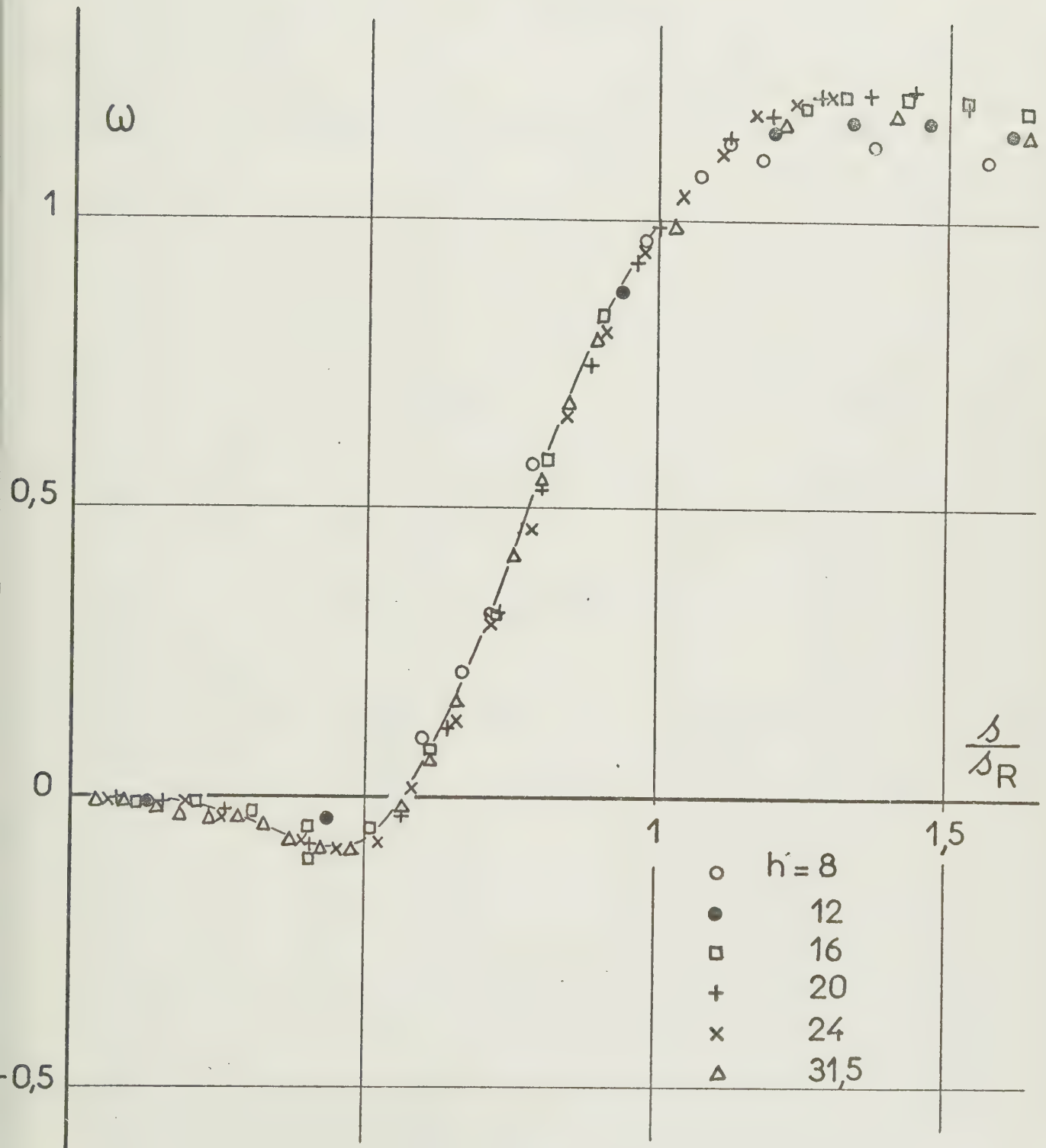
Pl.30 - ECOULEMENT DE BATCHELOR et ECOULEMENT REEL



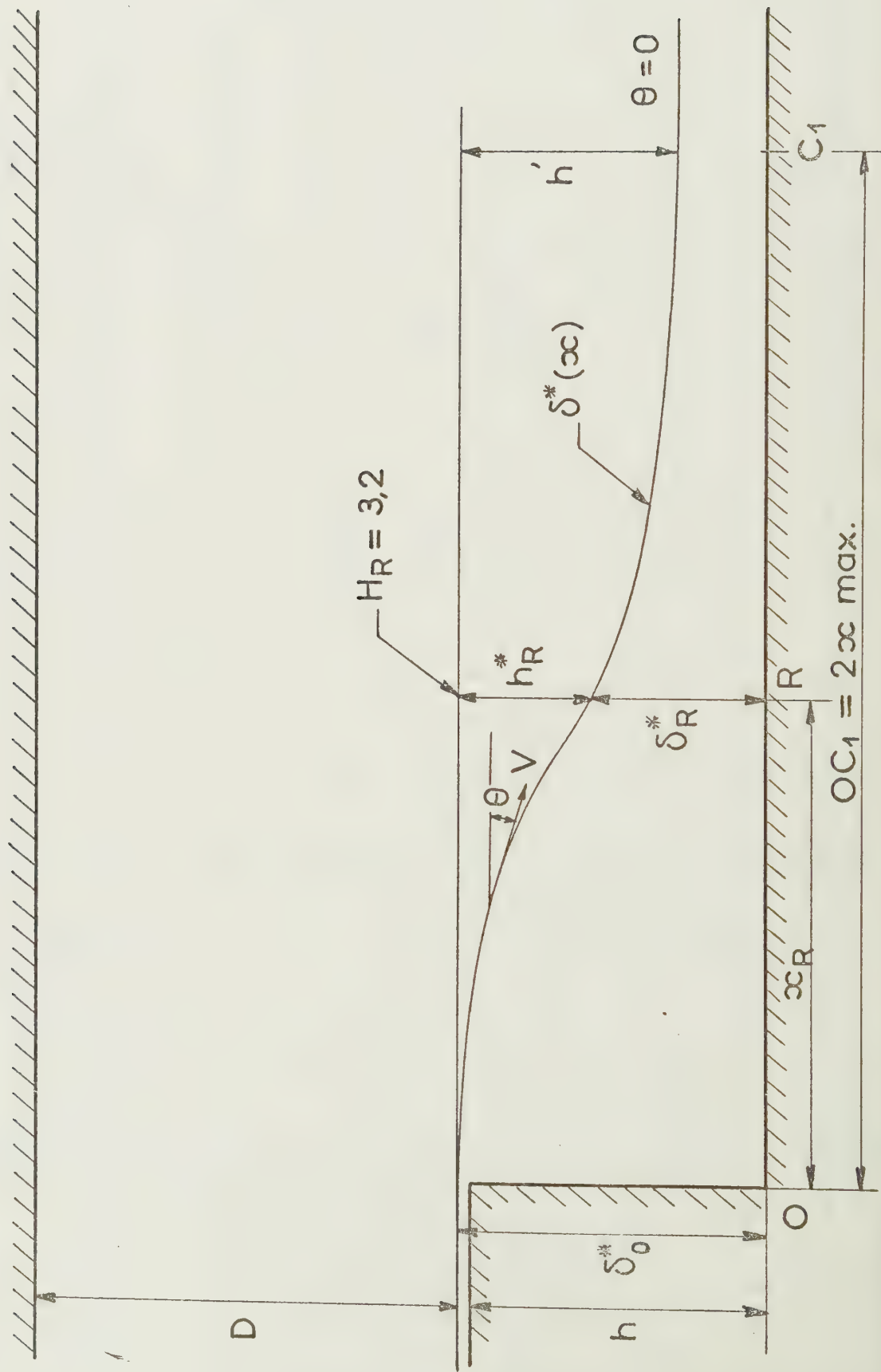
--- Ecoulement BATCHELOR
 — " réel

Pl. 31. DISTRIBUTION PARIETALE DE PRESSION
Coordonnées réduites

$$\alpha = -0,93$$

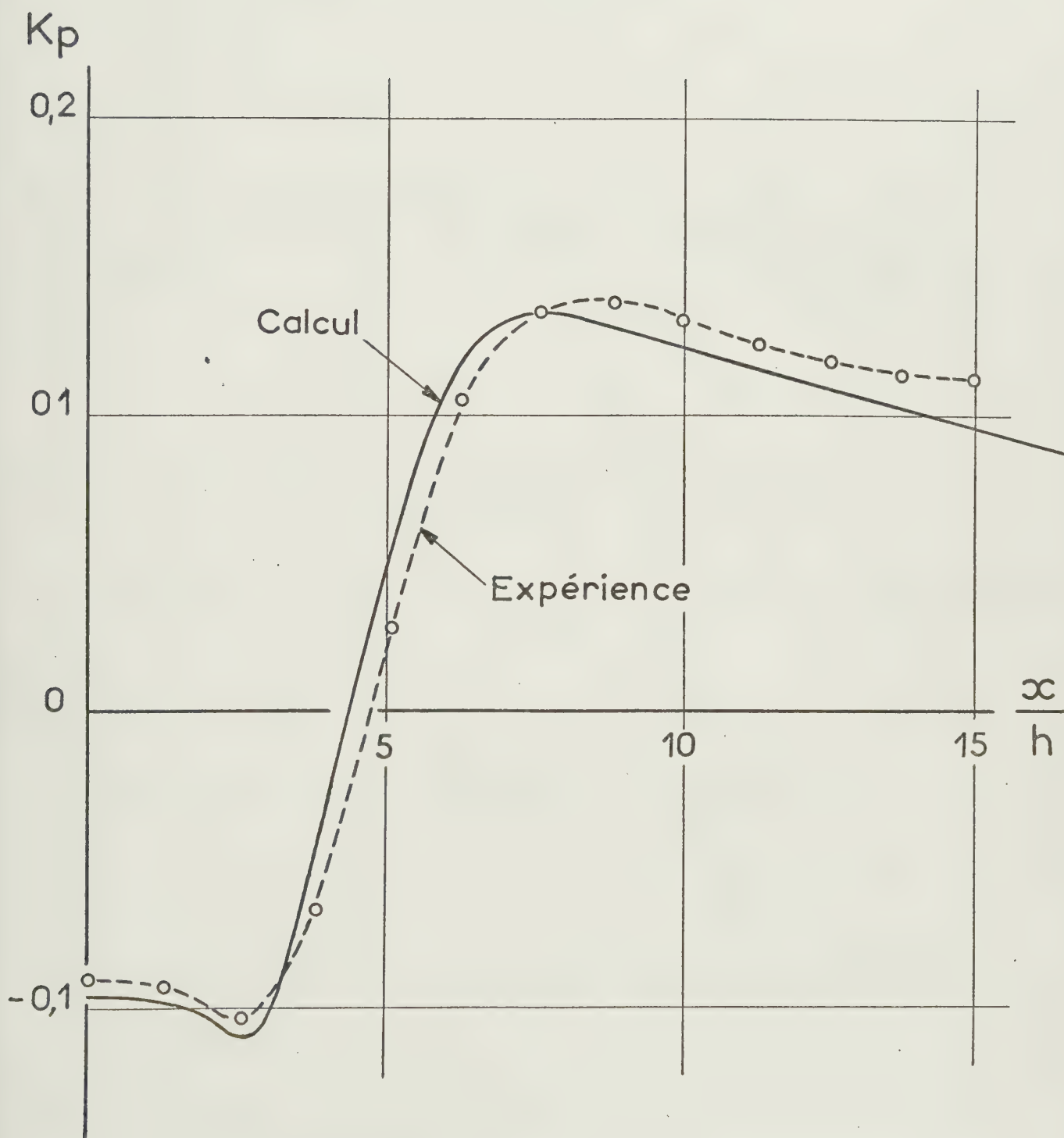


Pl. 31 a -



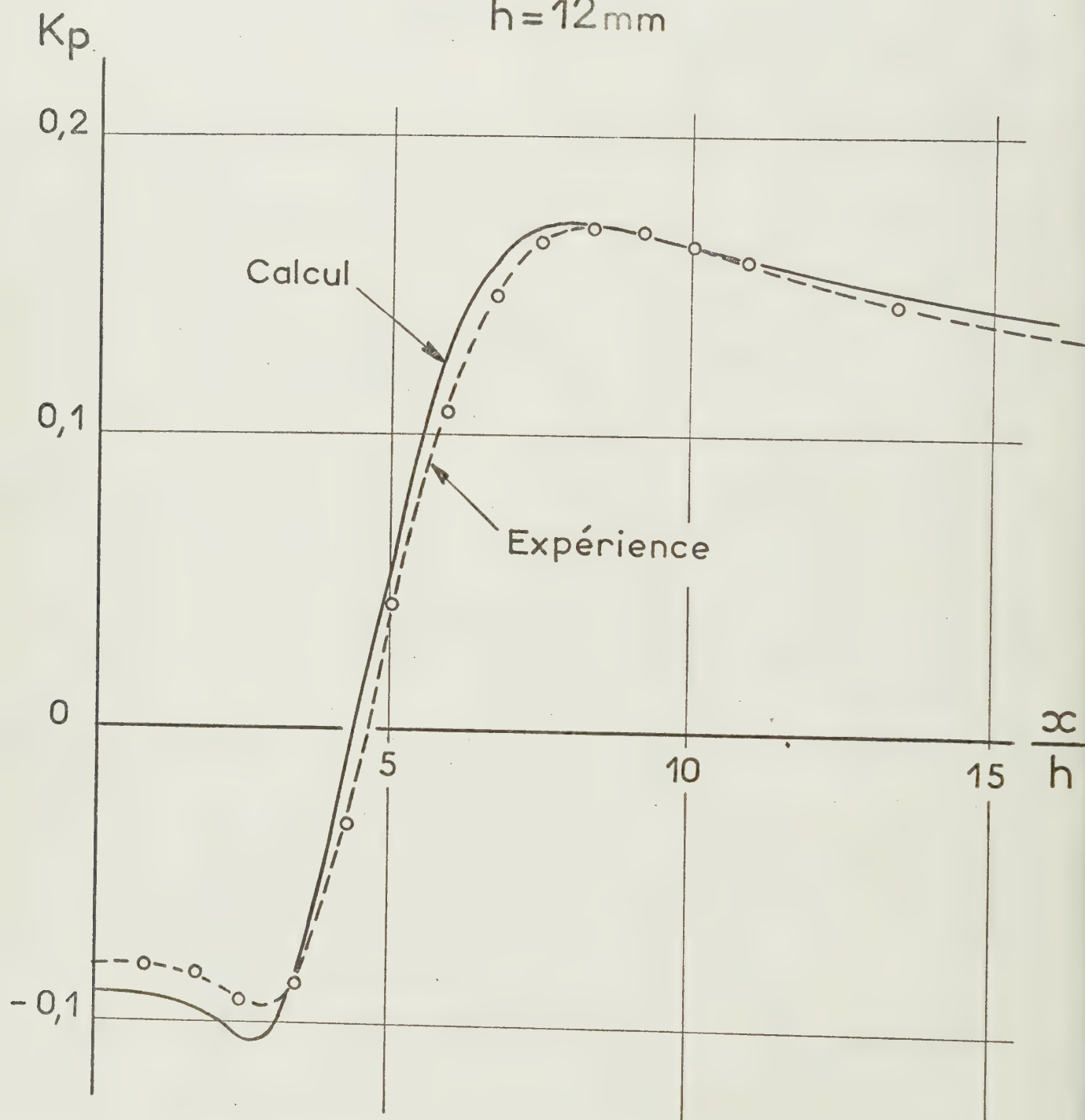
PI.32 REPARTITION DE PRESSION

$h = 8 \text{ mm}$



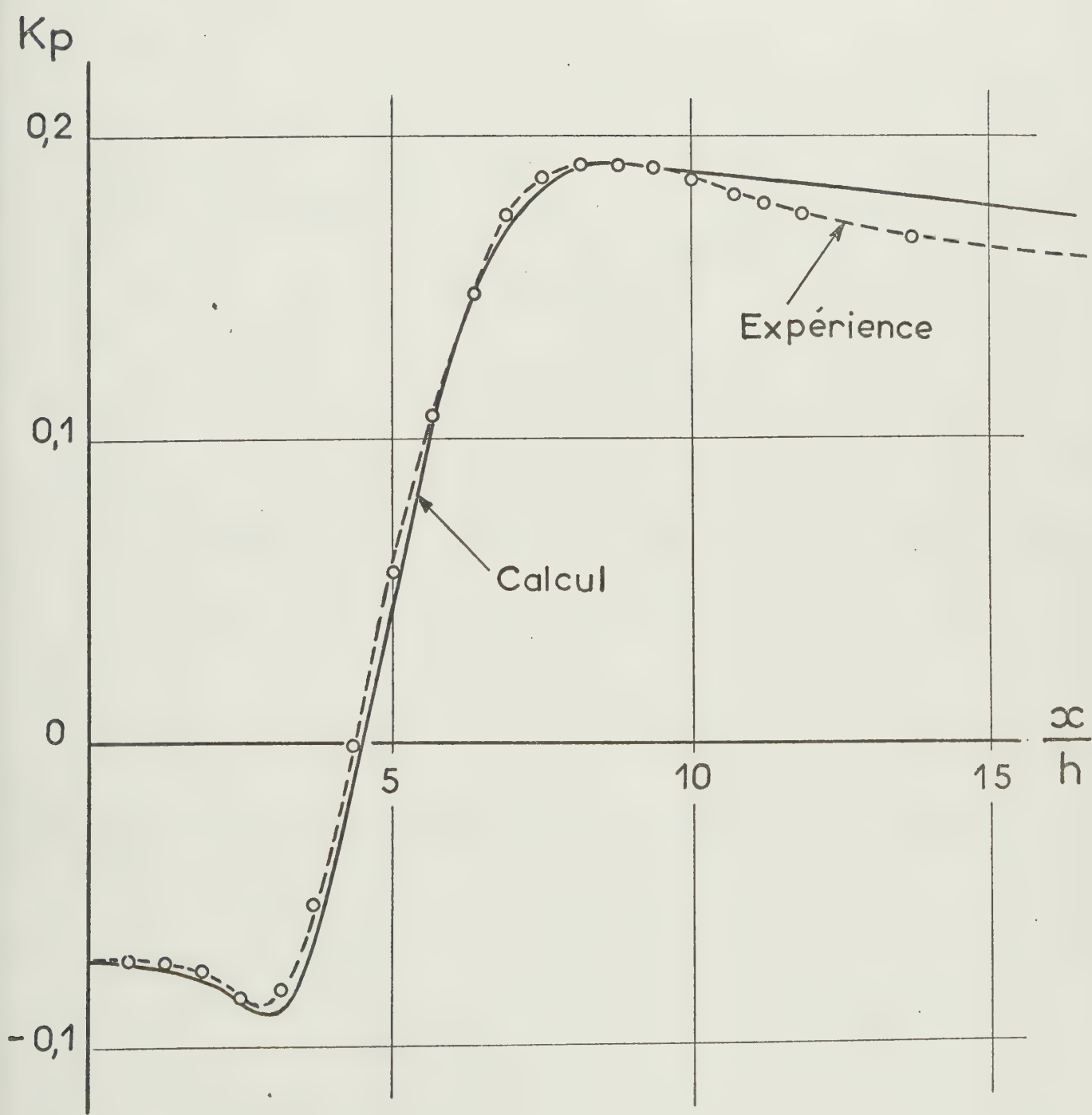
Pl.33 REPARTITION DE PRESSION

$h=12\text{mm}$



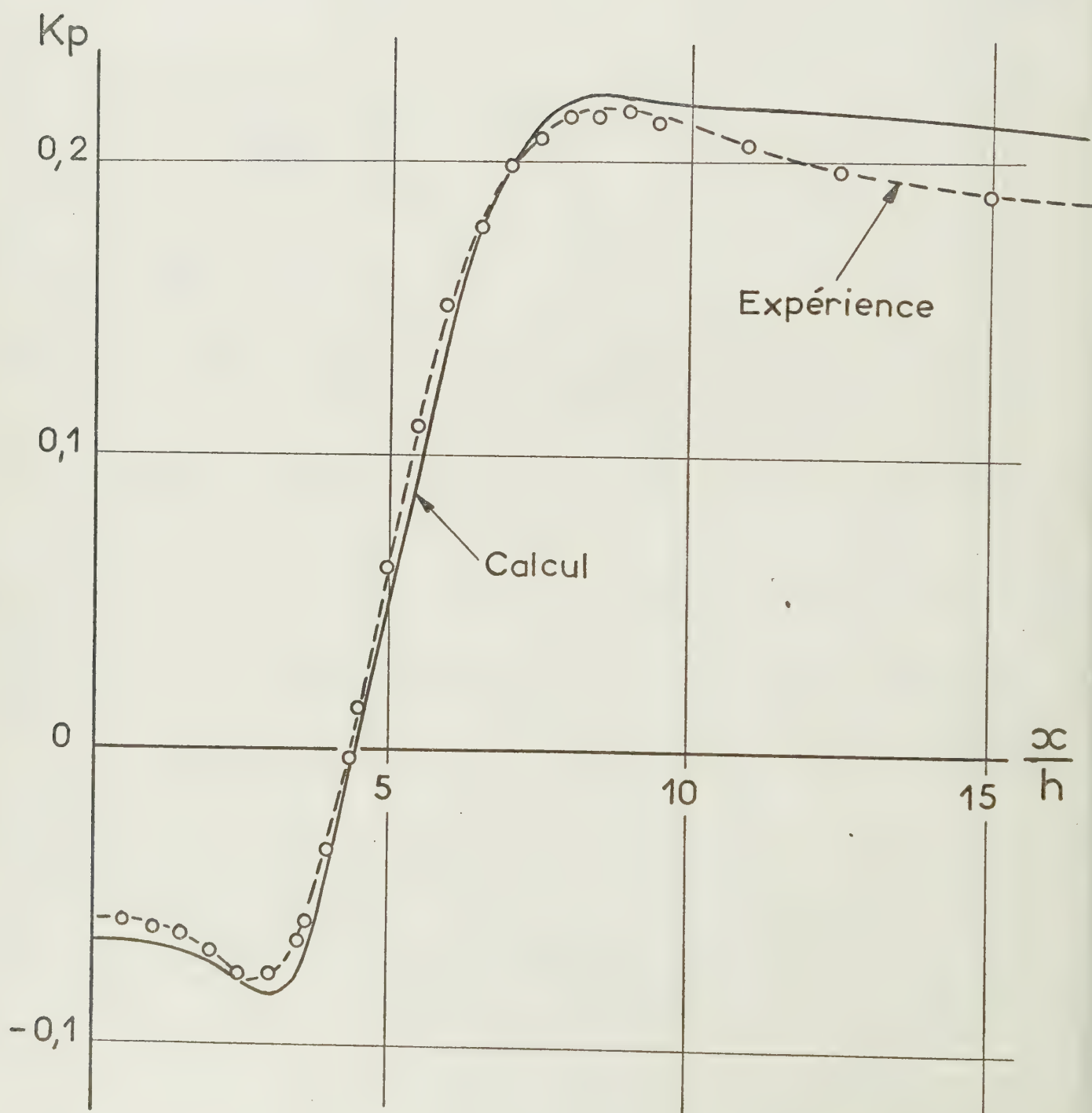
PI.34 - REPARTITION DE PRESSION

$h = 16\text{mm}$



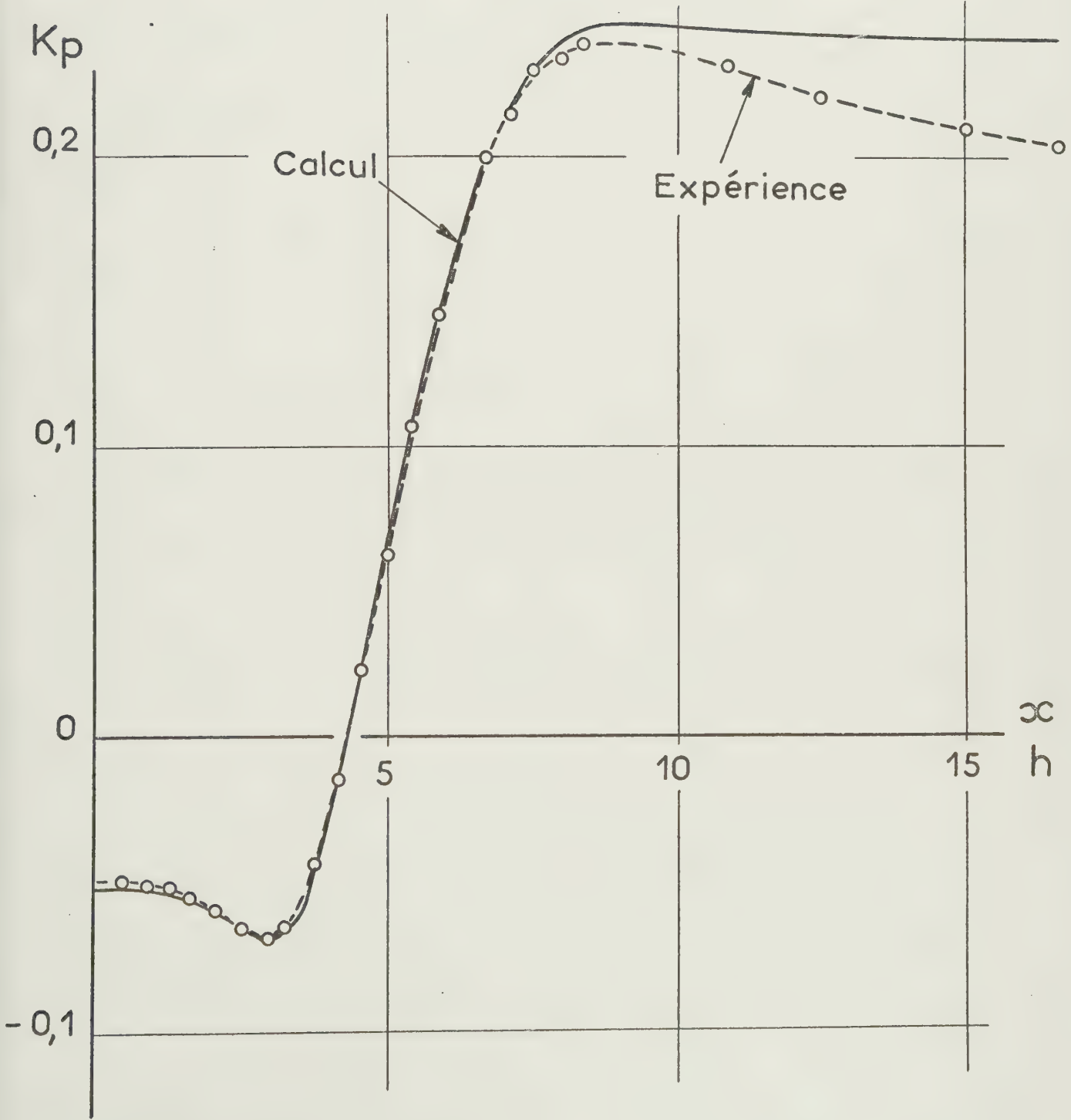
Pl.35 REPARTITION DE PRESSION

$h = 20\text{mm}$



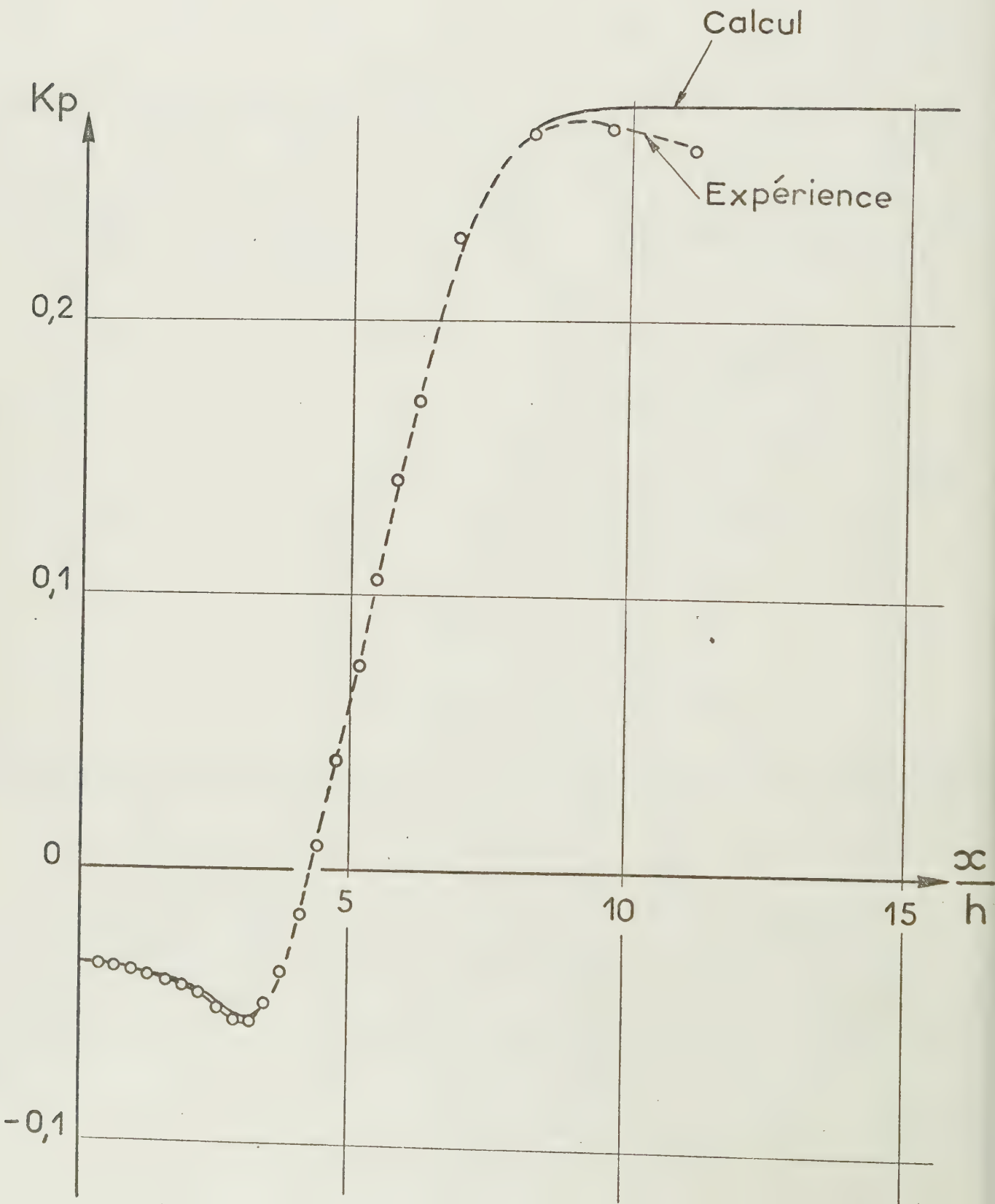
Pl.36_ REPARTITION DE PRESSION

$h = 24 \text{ mm}$



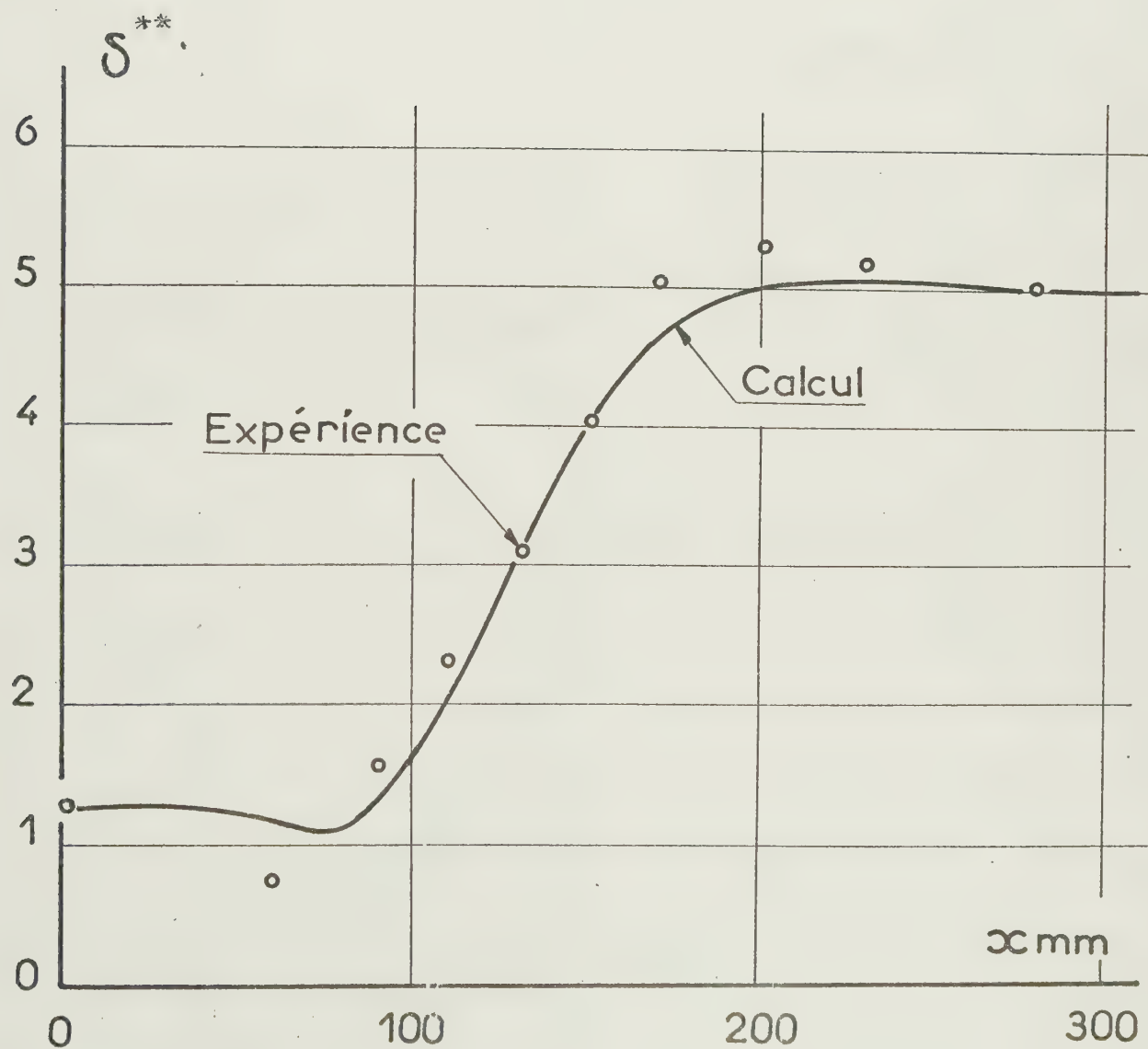
Pl. 37 REPARTITION DE PRESSION

$h = 31,5 \text{ mm}$



PI.38 _ EVOLUTION DE δ^{**}

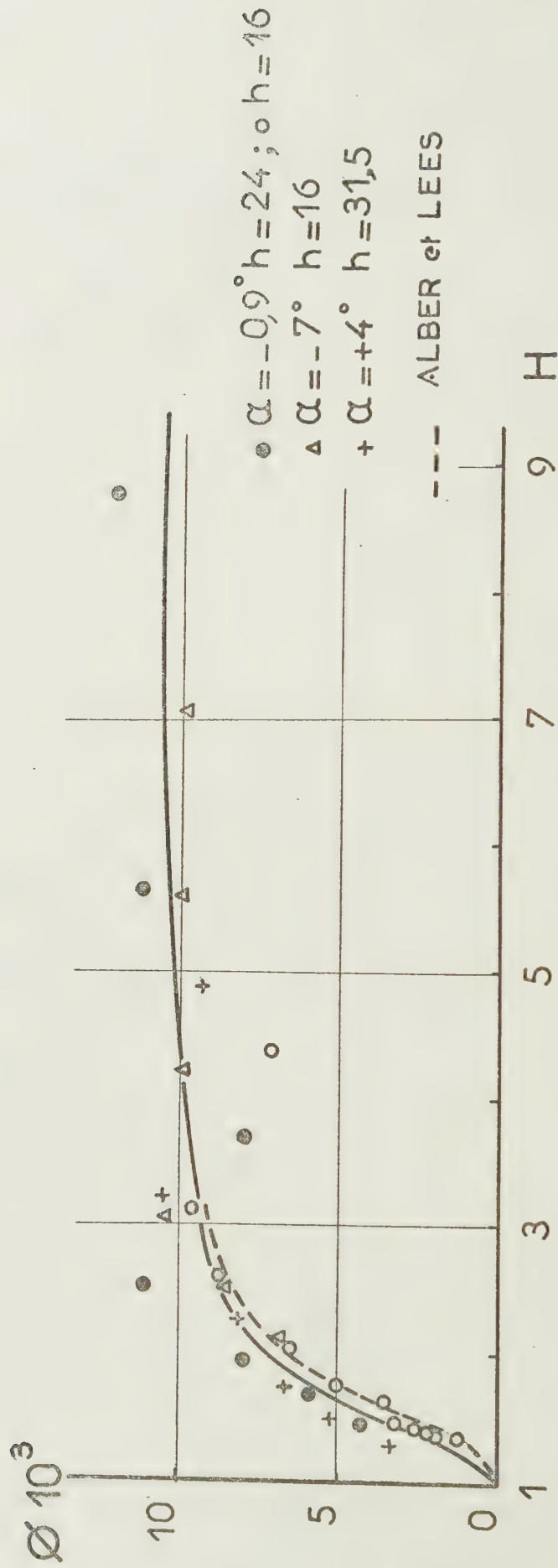
$h=24\text{mm}$



Pl.39 - FONCTION DE DISSIPATION

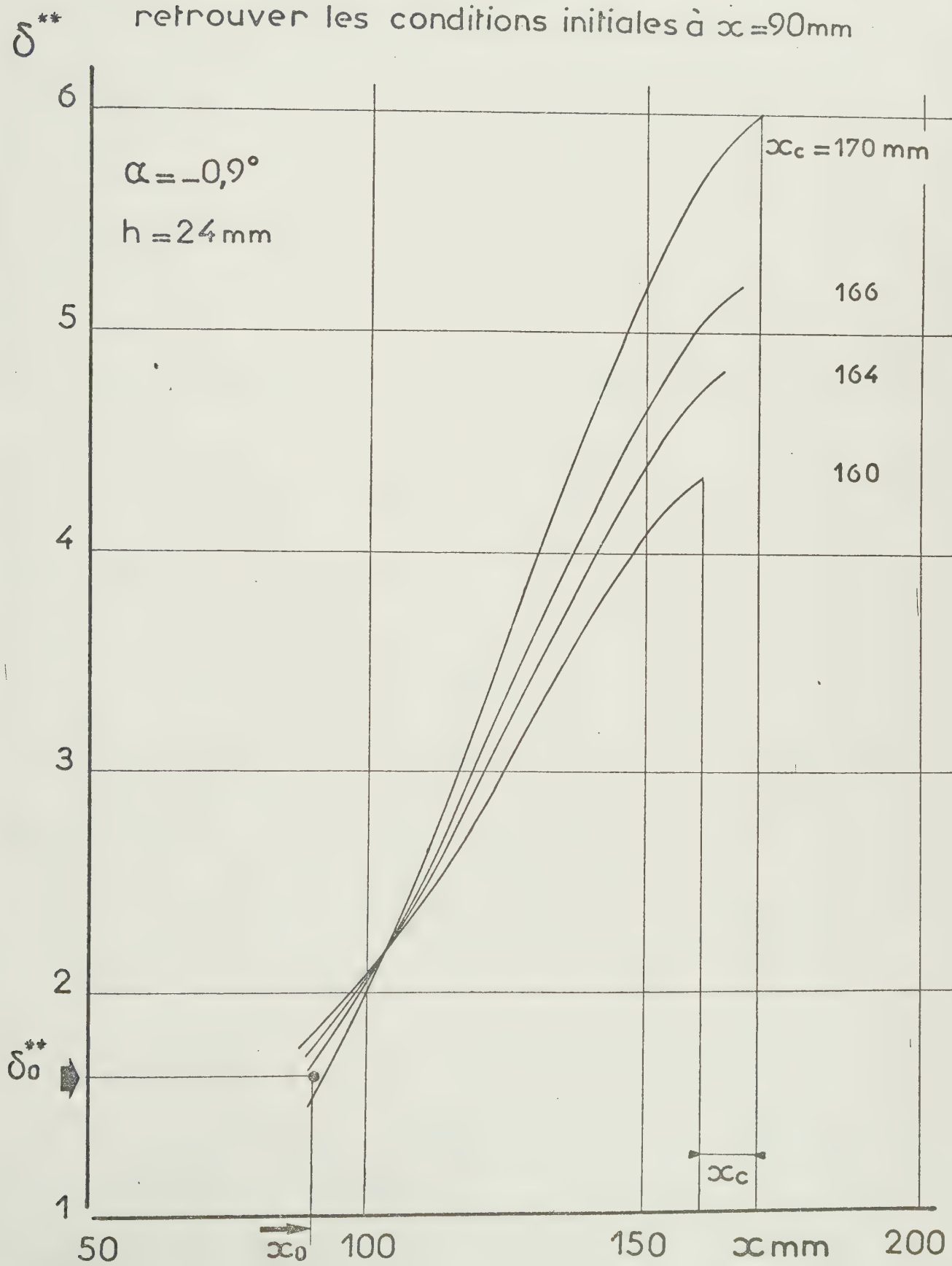
(recompression, réhabilitation)

($\emptyset, H$)



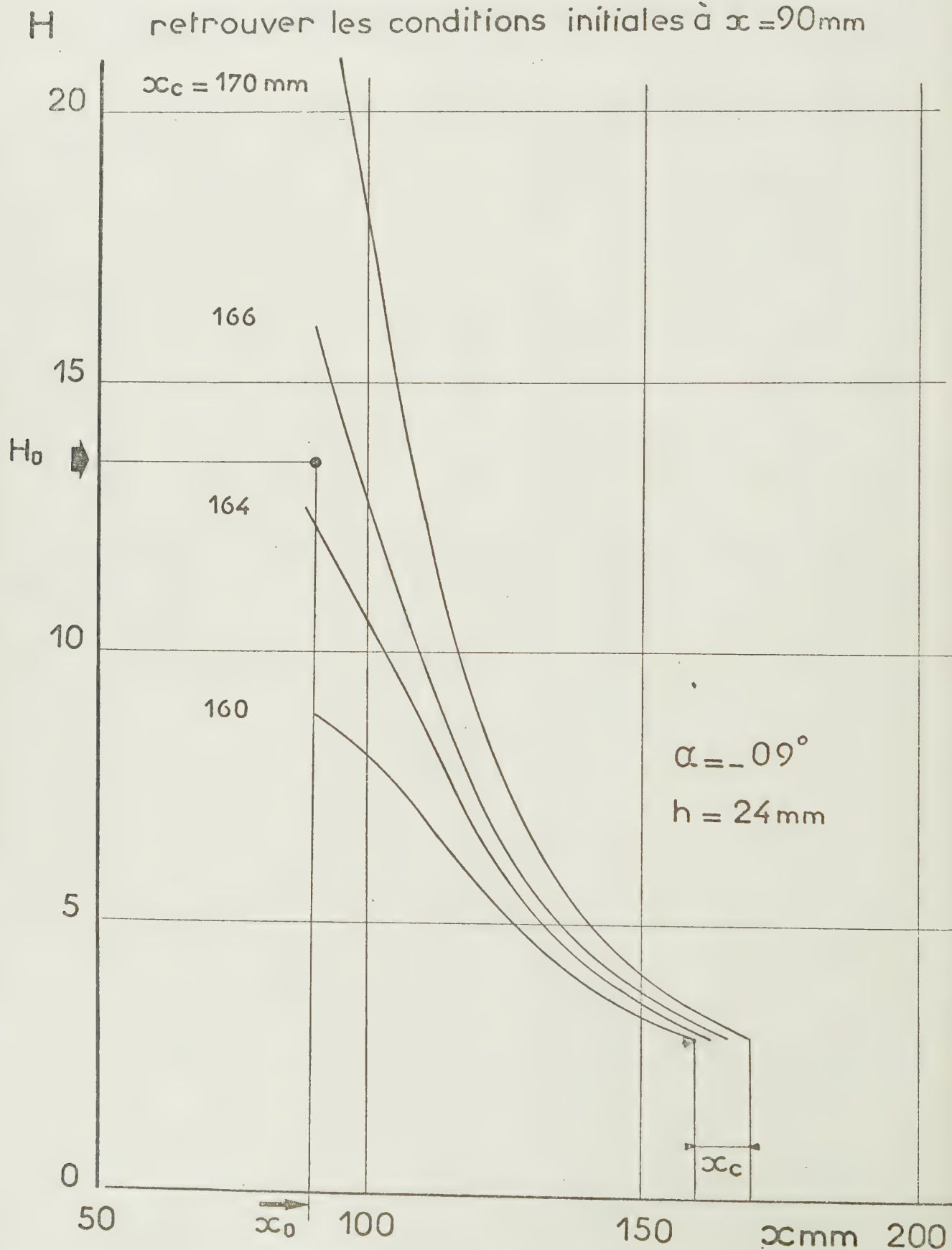
PI.40 _DETERMINATION DU POINT CRITIQUE

Calcul de δ^{**} à partir d'un point x_c pour retrouver les conditions initiales à $x=90\text{mm}$



PI.41_ DETERMINATION DU POINT CRITIQUE

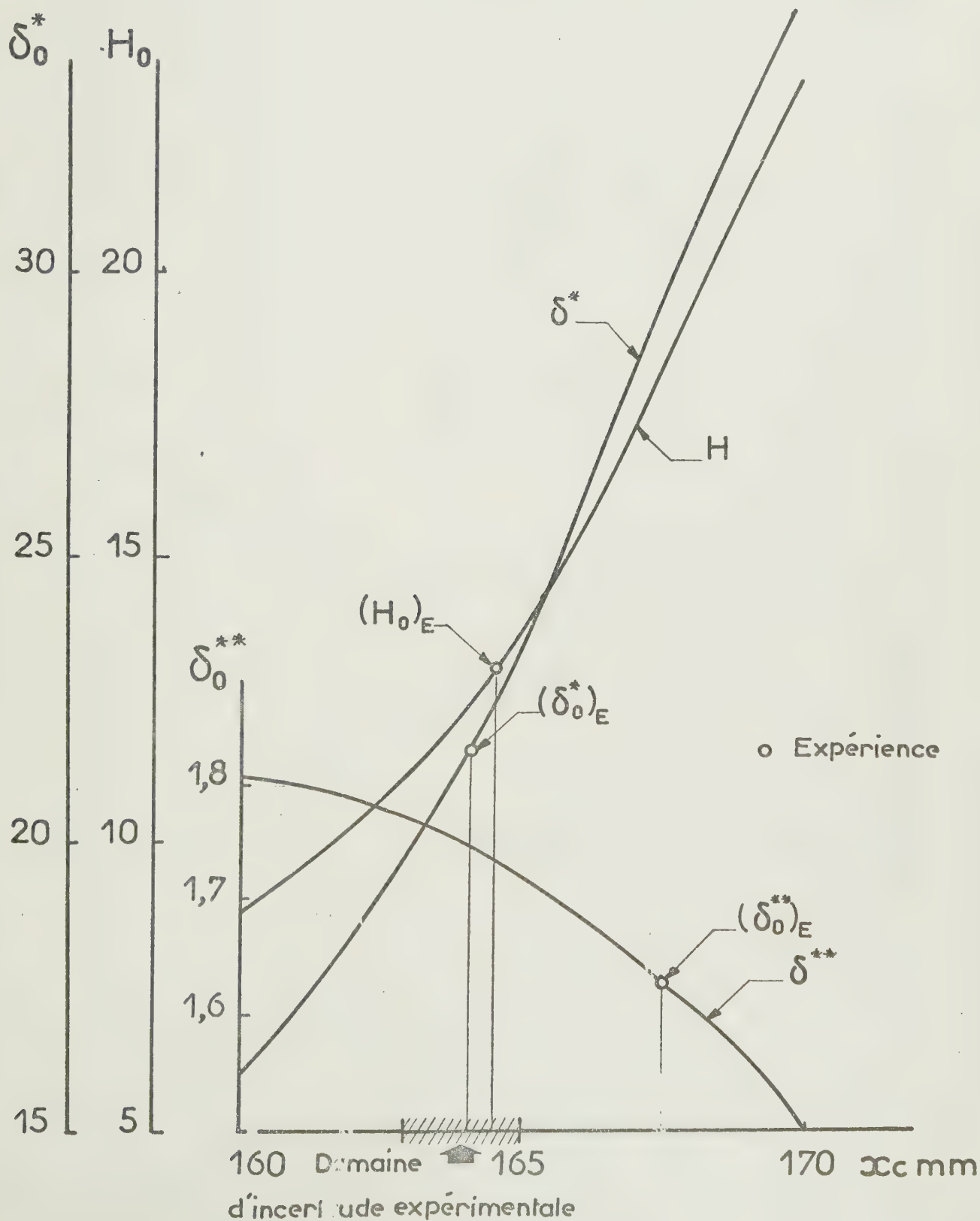
Calcul de H à partir d'un point x_c pour retrouver les conditions initiales à $x=90\text{mm}$



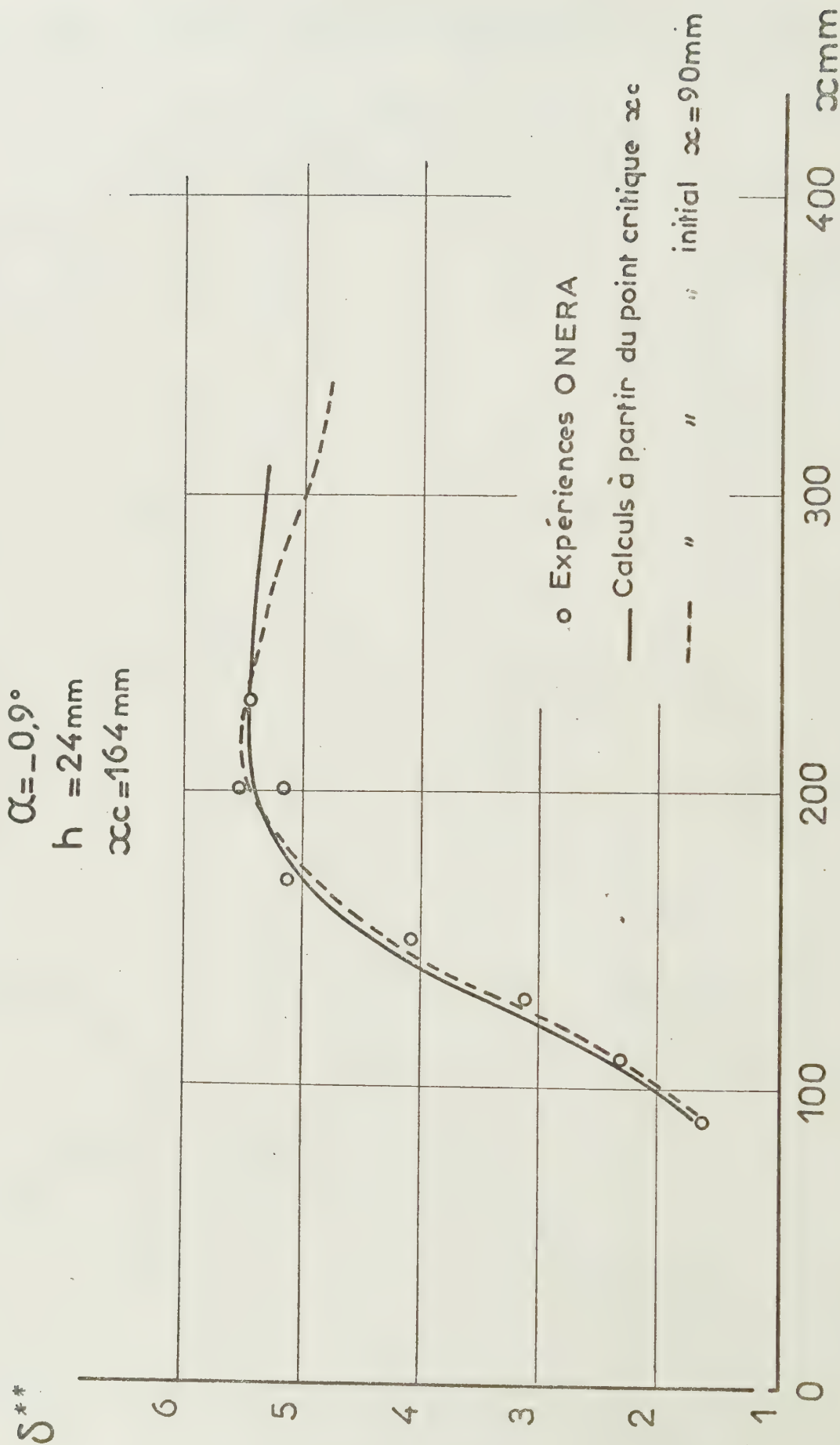
PI.42 _ DETERMINATION DU POINT CRITIQUE

$$\alpha = -0,9^\circ$$

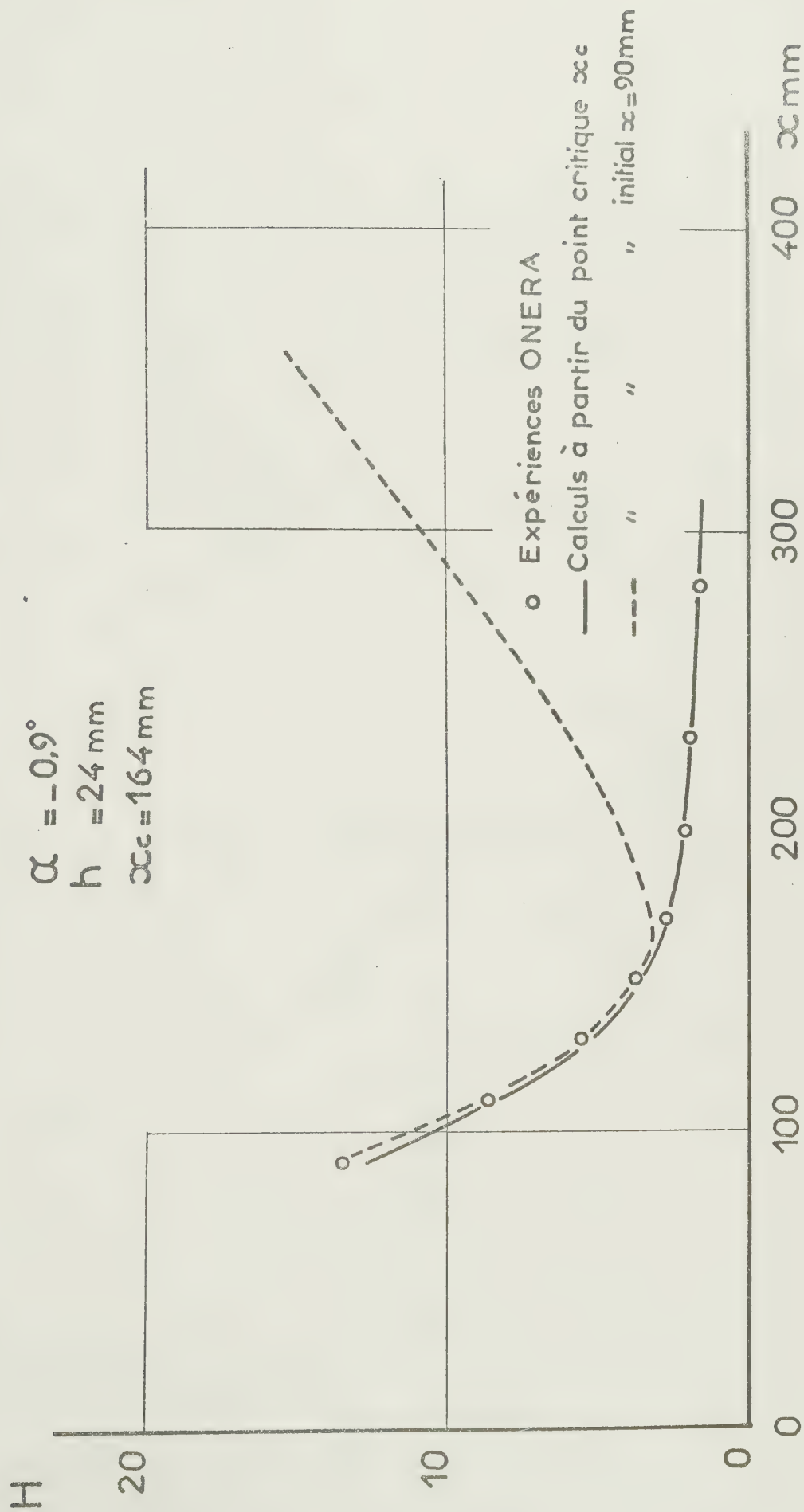
$$h = 24 \text{ mm}$$



Pl.43 - COMPARAISON CALCUL - EXPERIENCES



PI.44 - COMPARAISON CALCULS - EXPERIENCES

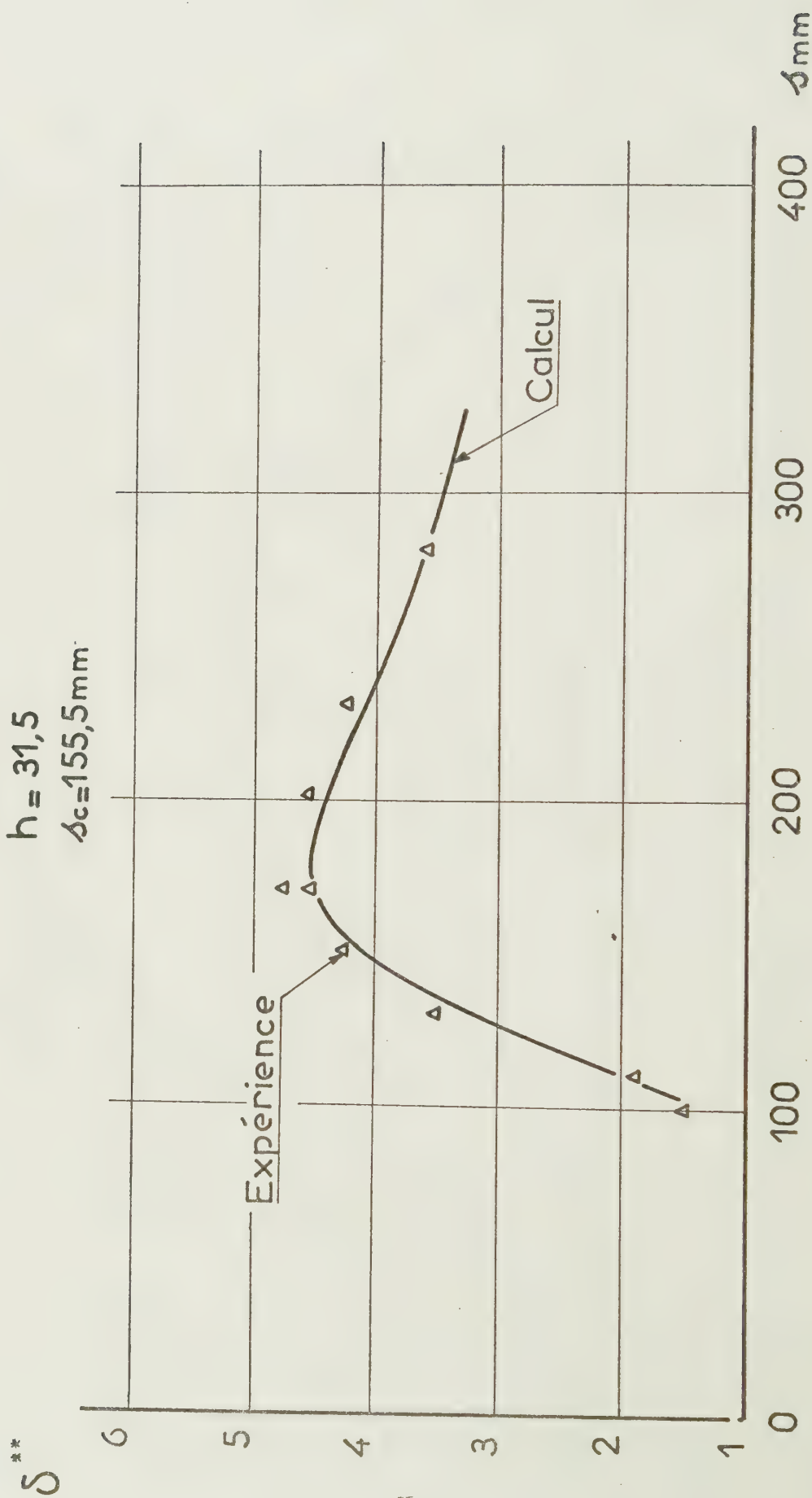


PI.45 _ EVOLUTION DE δ^{**}

$$\alpha = 4^{\circ}$$

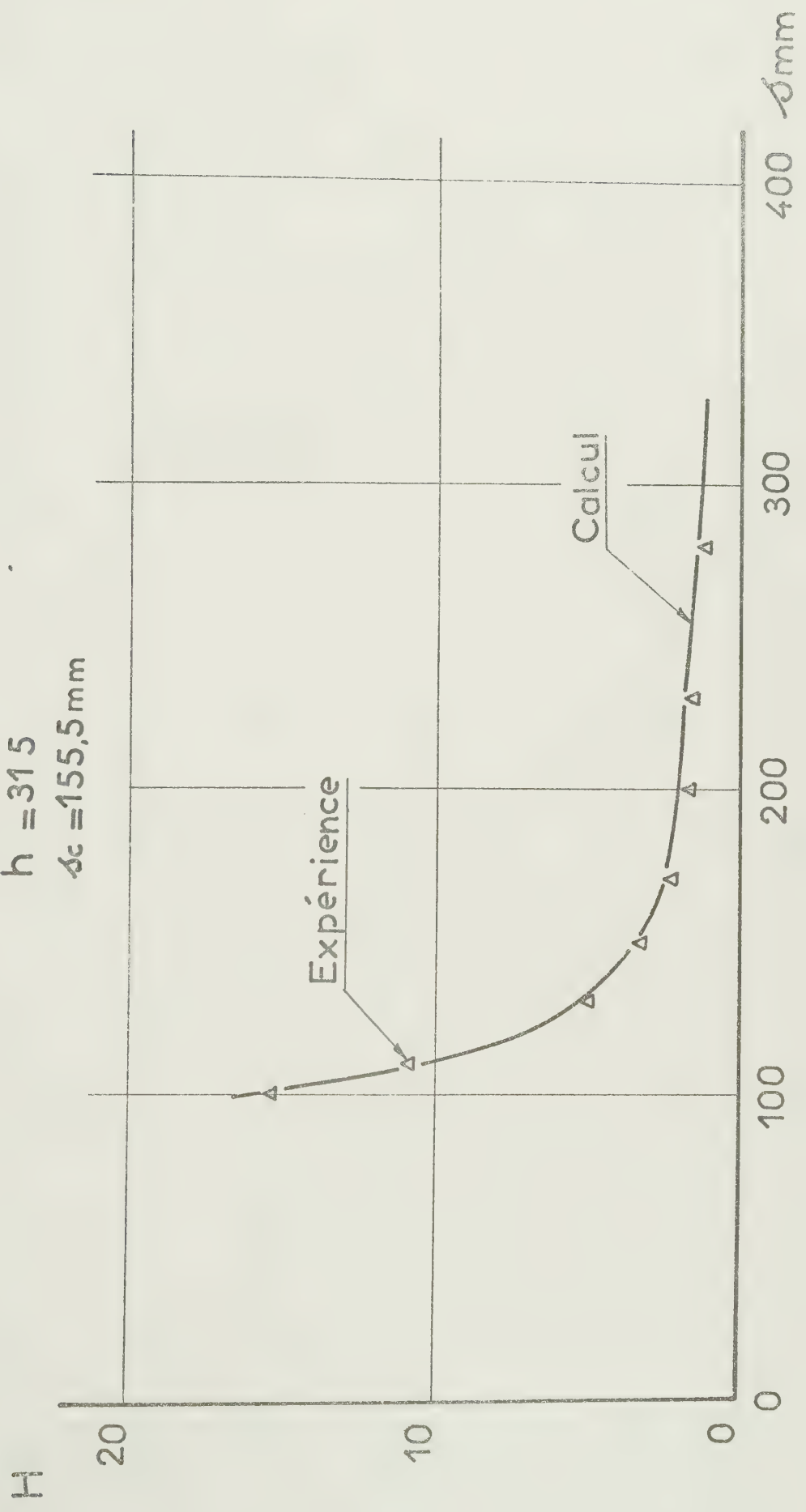
$$h = 31,5$$

$$\delta_c = 155,5 \text{ mm}$$



PI.46 - EVOLUTION DU PARAMETRE DE FORME H

$\alpha = 4^\circ$
 $h = 315$
 $\delta c = 155,5 \text{ mm}$



δ^{**}

PI.47_ EVOLUTION DE δ^{**}

8

7

6

5

4

3

2

1

0

100

200

300

400

δ mm

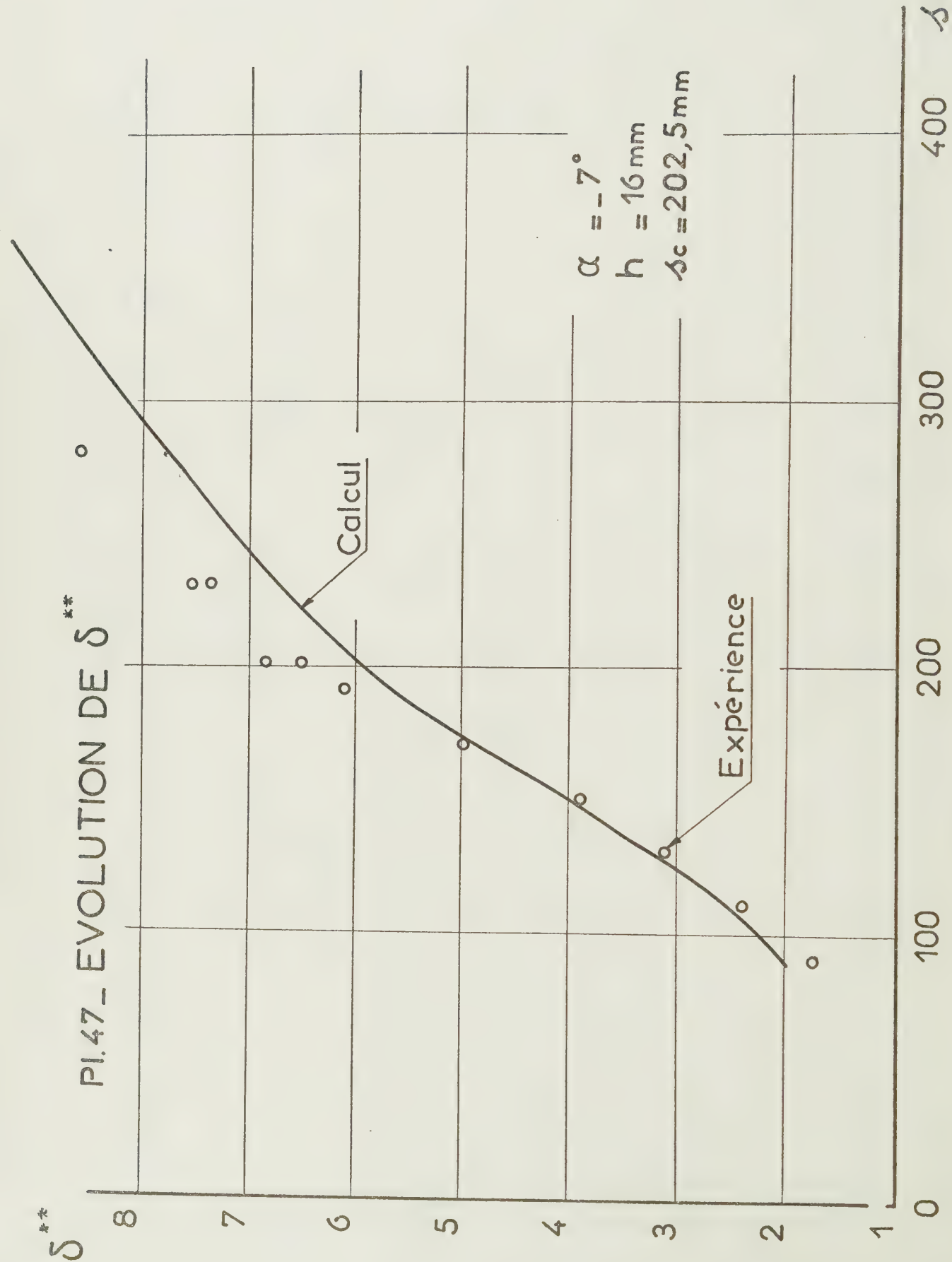
$\alpha = -7^\circ$

$h = 16$ mm

$\delta_c = 202,5$ mm

Calcul

Expérience

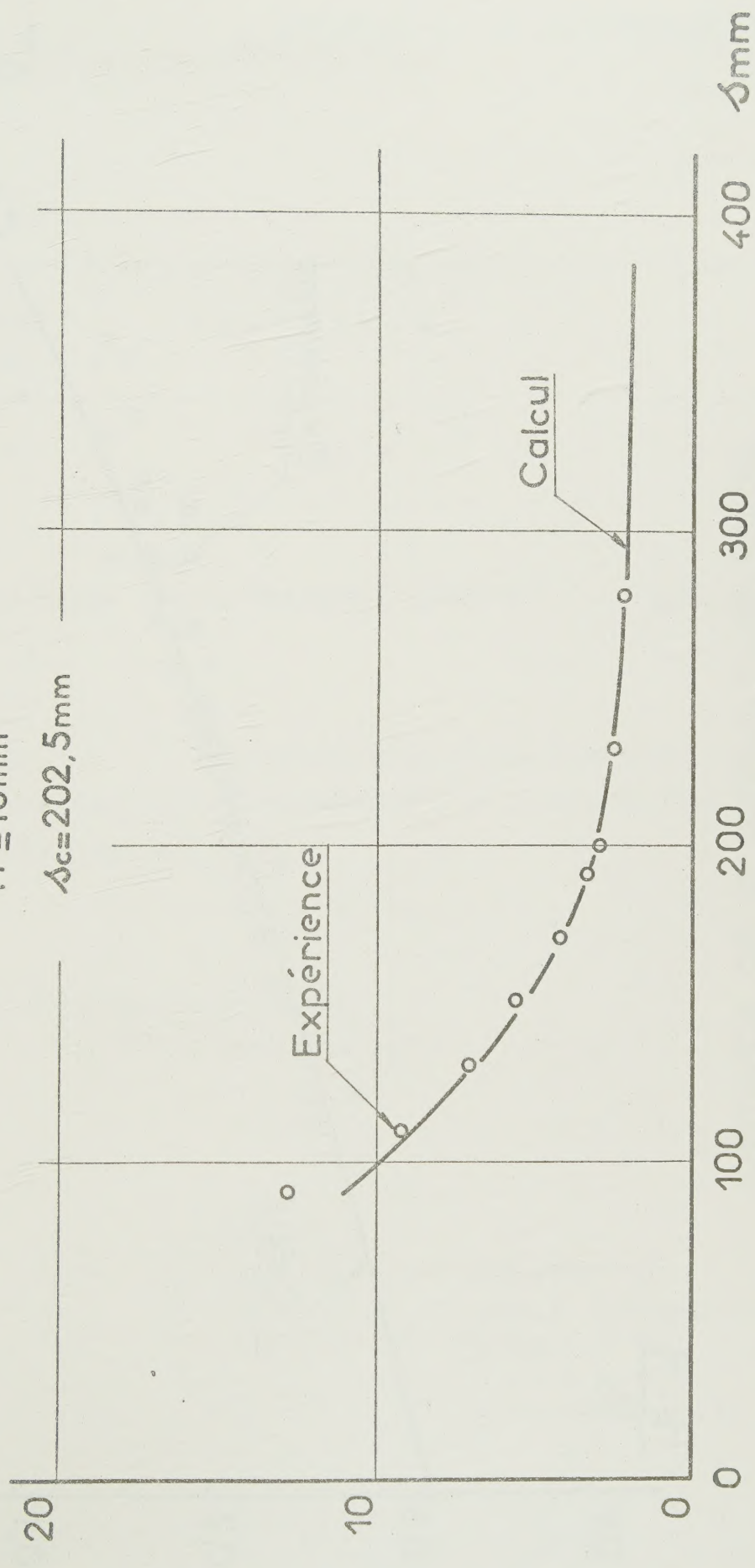


PI.48 - EVOLUTION DU PARAMETRE DE FORME H

$\alpha = -7^\circ$

$h = 16\text{mm}$

$\Delta c = 202,5\text{mm}$



PI.49 _ PRESSION AU POINT DE RECOLLEMENT

Influence de la couche limite initiale

